

# Savoir sans Frontières

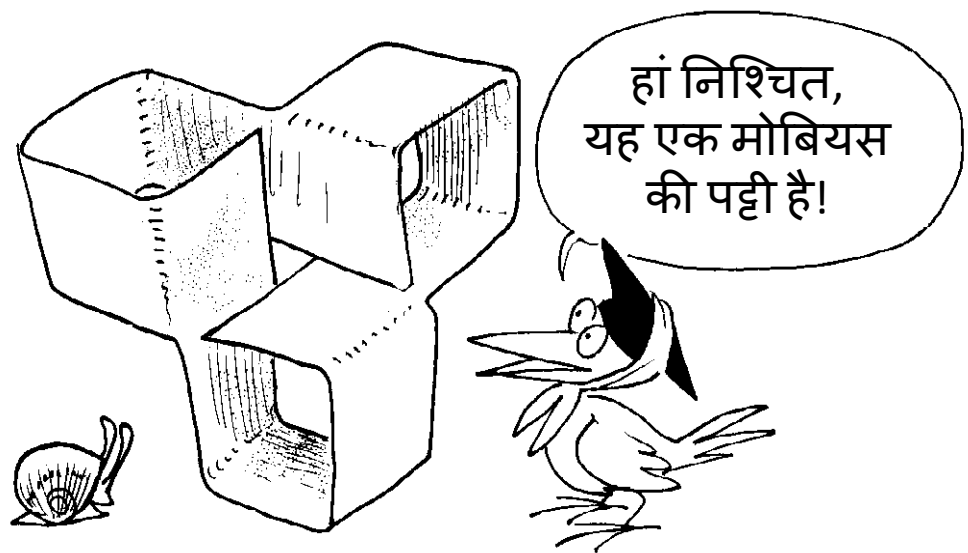
द एडवेंचर्स ऑफ आर्चीबाल्ड हिगिंस

## टोपो की दुनिया

Jean-Pierre Petit

जीन-पियरे पेटिट

हिंदी : अरविन्द गुप्ता



प्रोफेसर जीन-पियरे पेटिट पेशे से एक एस्ट्रो-फिजिसिस्ट हैं। उन्होंने "एसोसिएशन ऑफ नॉलेज विदाउट बॉर्डर्स" की स्थापना की और वो उसके अध्यक्ष भी हैं। इस संस्था का उद्देश्य वैज्ञानिक और तकनीकी ज्ञान और जानकारी को अधिक-से-अधिक देशों में फैलाना है। इस उद्देश्य के लिए, उनके सभी लोकप्रिय विज्ञान संबंधी लेख जिन्हें उन्होंने पिछले तीस वर्षों में तैयार किया और उनके द्वारा बनाई गई सचित्र एलबम्स, आज सभी को आसानी से और निशुल्क उपलब्ध हैं। उपलब्ध फाइलों से डिजिटल, अथवा प्रिंटेड कॉपियों की अतिरिक्त प्रतियां आसानी से बनाई जा सकती हैं। एसोसिएशन के उद्देश्य को पूरा करने के लिए इन पुस्तकों को स्कूलों, कॉलेजों और विश्वविद्यालयों के पुस्तकालयों में भेजा जा सकता है, बशर्ते इससे कोई आर्थिक और राजनीतिक लाभ प्राप्त न करें और उनका कोई, सांप्रदायिक दुरुपयोग न हो। इन पीडीएफ फाइलों को स्कूलों और विश्वविद्यालयों के पुस्तकालयों के कंप्यूटर नेटवर्क पर भी डाला जा सकता है।



जीन-पियरे पेटिट ऐसे अनेक कार्य करना चाहते हैं जो अधिकांश लोगों को आसानी से उपलब्ध हो सकें। यहां तक कि निरक्षर लोग भी उन्हें पढ़ सकें। क्योंकि जब पाठक उन पर क्लिक करेंगे तो लिखित भाग स्वयं ही "बोलेगा"। इस प्रकार के नवाचार "साक्षरता योजनाओं" में सहायक होंगे। दूसरी एल्बम "द्विभाषी" होंगी जहां मात्र एक क्लिक करने से ही एक भाषा से दूसरी भाषा में स्विच करना संभव होगा। इसके लिए एक उपकरण उपलब्ध कराया जायेगा जो भाषा कौशल विकसित करने में लोगों को मदद देगा।

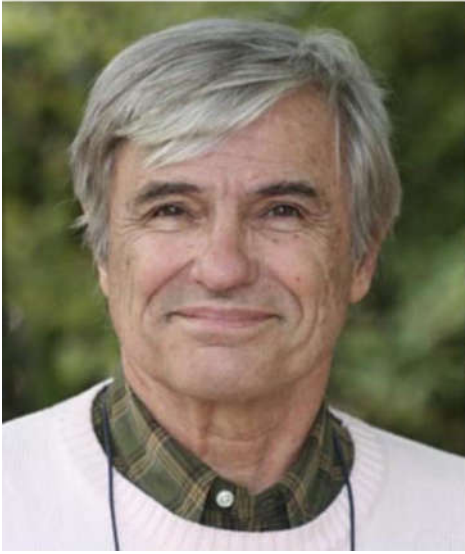
**जीन-पियरे पेटिट** का जन्म 1937 में हुआ था। उन्होंने फ्रेंच अनुसंधान में अपना करियर बनाया। उन्होंने प्लाज्मा भौतिक वैज्ञानिक के रूप में काम किया, उन्होंने एक कंप्यूटर साइंस सेंटर का निर्देशन किया, और तमाम सॉफ्टवेयर्स बनाए। उनके सैकड़ों लेख वैज्ञानिक पत्रिकाओं में प्रकाशित हुए हैं जिनमें द्रव यांत्रिकी से लेकर सैद्धांतिक सृष्टिशास्त्र तक के विषय शामिल हैं। उन्होंने लगभग तीस पुस्तकें लिखी हैं जिनका कई भाषाओं में अनुवाद हुआ है।

निम्नलिखित इंटरनेट साइट पर एसोसिएशन से संपर्क किया जा सकता है:

<http://savoir-sans-frontieres.com>

# सीमाओं के बिना ज्ञान

गैर-लाभकारी संगठन एसोसिएशन 2005 में बनाई गई और दो फ्रांसीसी वैज्ञानिकों द्वारा प्रबंधित की गई। उद्देश्य: मुफ्त डाउनलोड करने योग्य पीडीएफ के माध्यम से तैयार किए गए बैंड का उपयोग करके वैज्ञानिक ज्ञान का प्रसार करना। 2020 में: 40 भाषाओं में 565 अनुवाद इस प्रकार हासिल किए गए थे। 500,000 से अधिक डाउनलोड के साथ।



Jean-Pierre Petit



Gilles d'Agostini

एसोसिएशन पूरी तरह से स्वैच्छिक है। धन पूरी तरह से अनुवादकों को दान कर दिया।

दान करने के लिए, होम पेज पर पेपाल बटन का उपयोग करें:

<http://www.savoir-sans-frontieres.com>



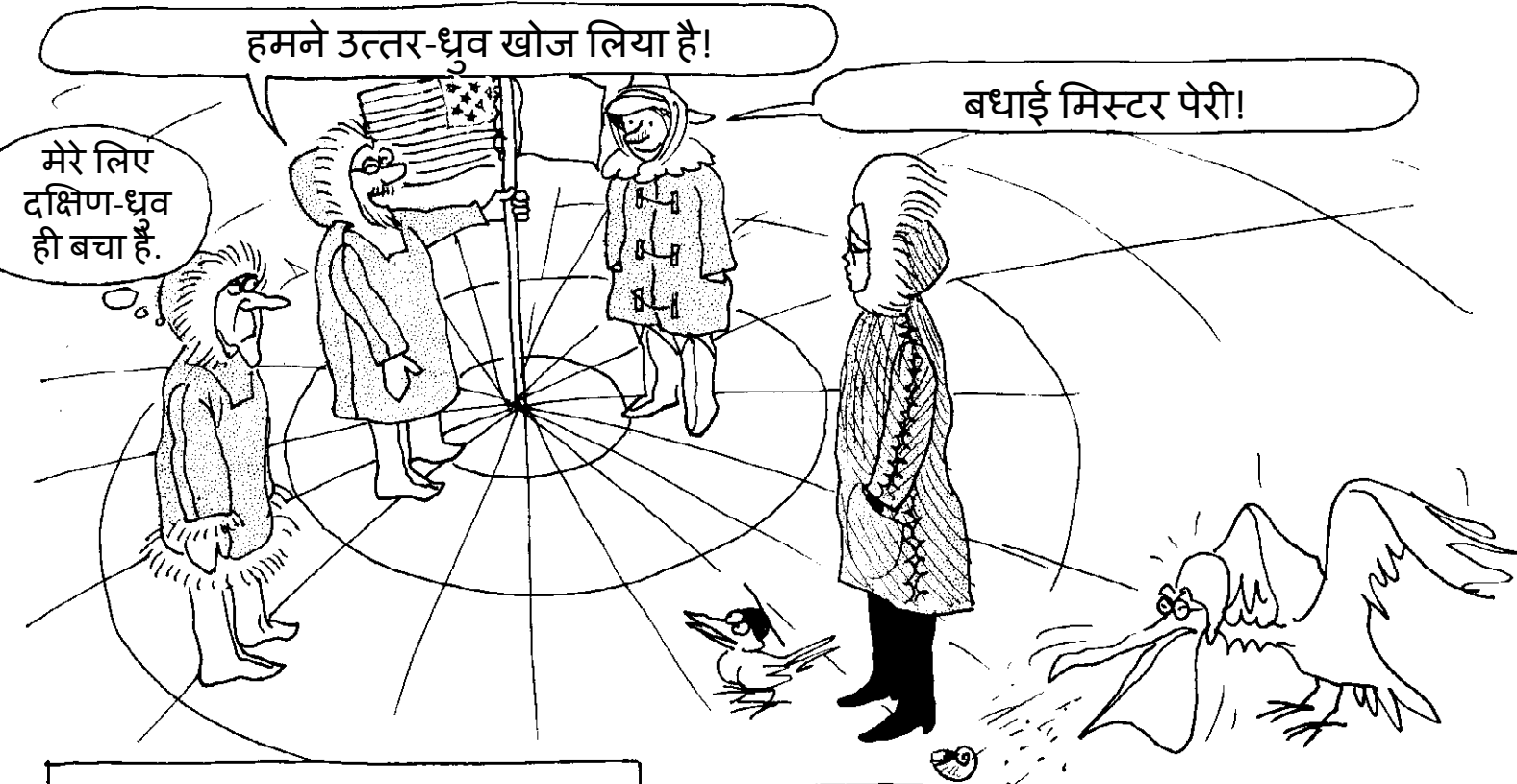
## पाठकों को चेतावनी

इस पुस्तक को पढ़ने से बचें :

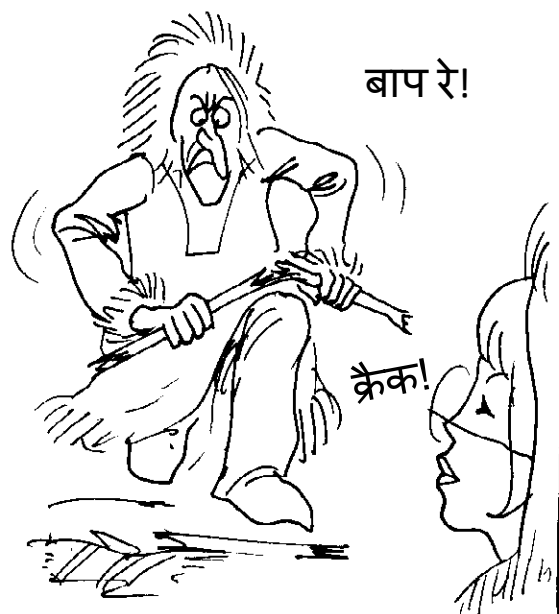
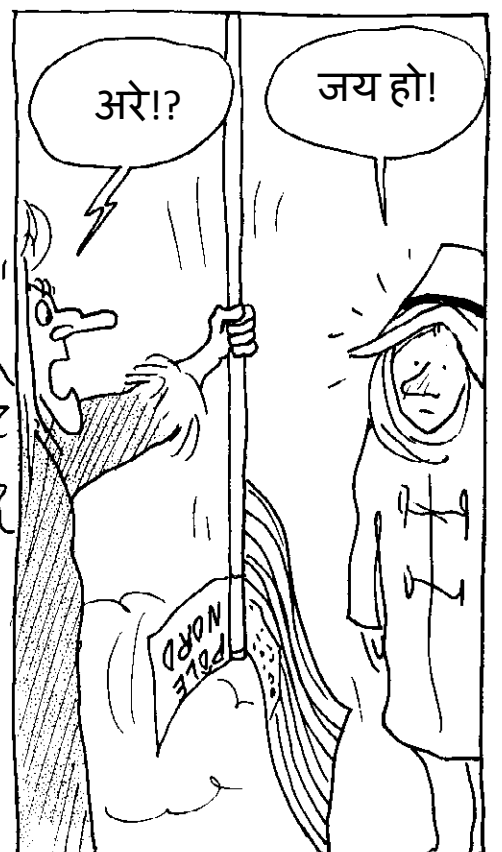
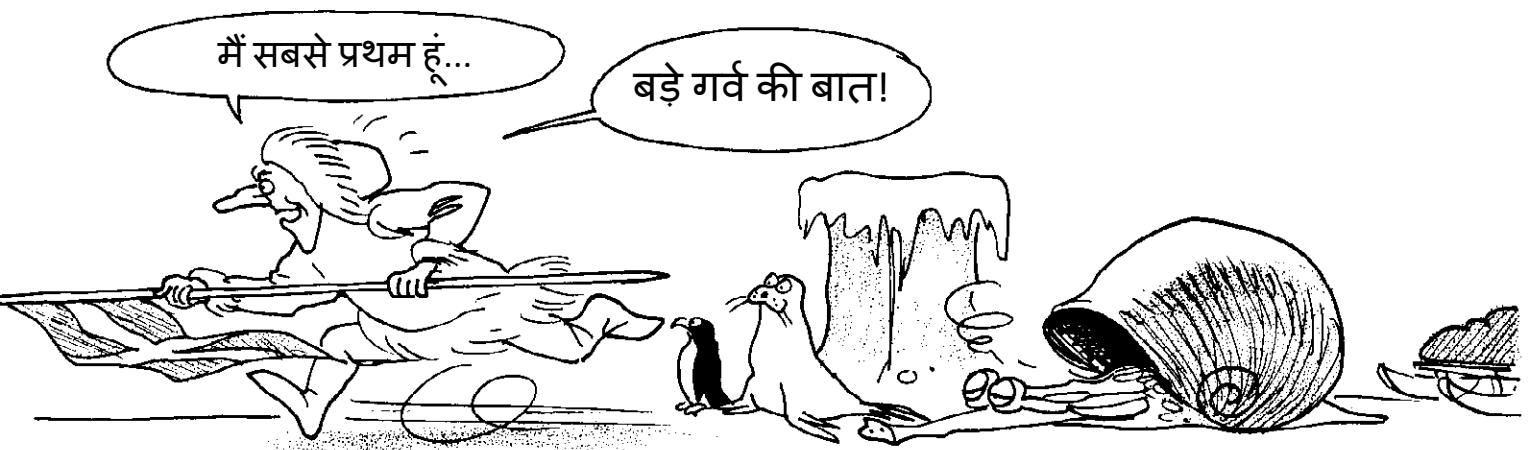
- शाम को बिस्तर में सोने से पहले
- भारी भोजन के बाद
- या जब आप हर चीज़ के बारे में अनिश्चित हों, क्योंकि इसे पढ़ने से हालात और बदतर बनेंगे.

- लेखक

# दक्षिण-ध्रुव के बिना एक ग्रह







देखो, इसके बारे में किसी से एक शब्द भी नहीं कहना!

अरे देखो!

शांत रहें मिस्टर अमुंडसेन!

मेरा झंडा!  
गायब हो रहा है!!!

क्या!!!?

अरे, क्या तुमने अपनी शरारत खत्म कर दी है?

अजीब, मुझे वो मिस्टर पेरी की आवाज़ लगी.....

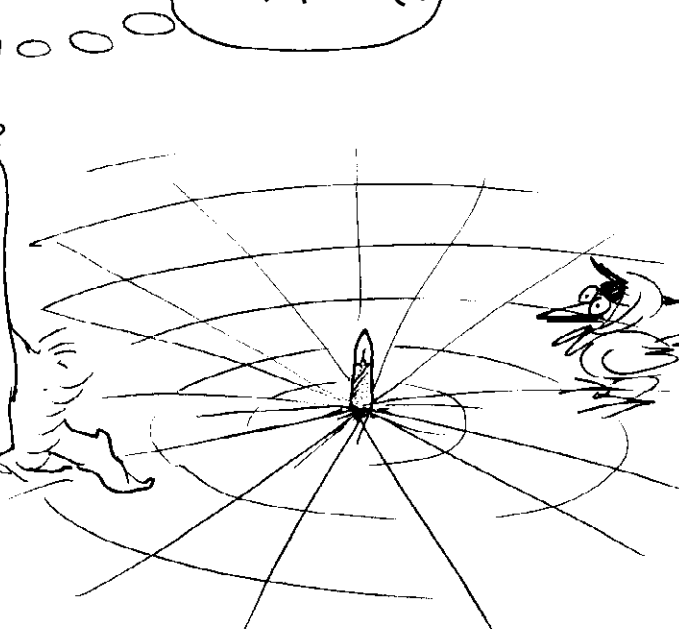
टोंक  
टोंक  
टोंक

चलें, मिस्टर अमुंडसेन अब घर चलें.

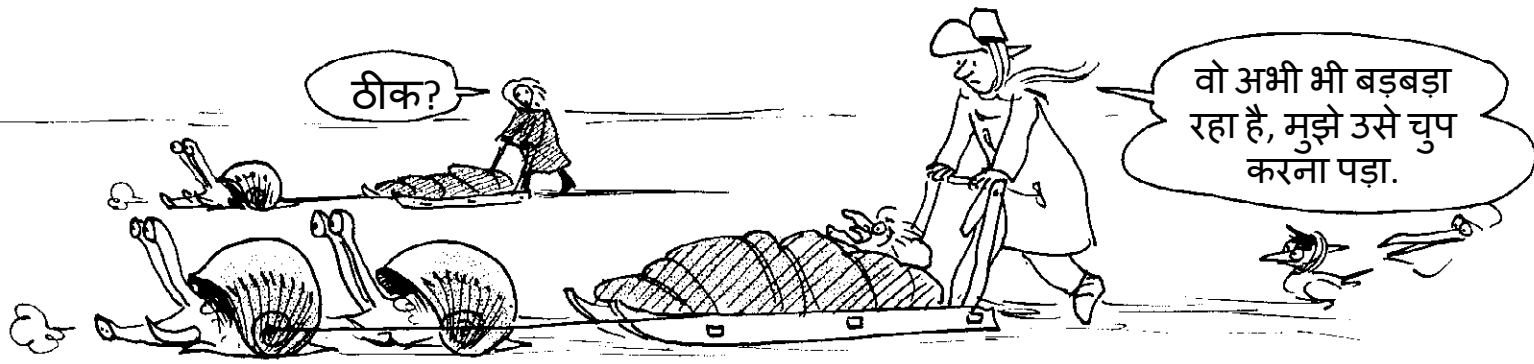
वो सदमे में है!

हम इसके बारे में सब कुछ पता लगाने की कोशिश करेंगे.

ठीक!



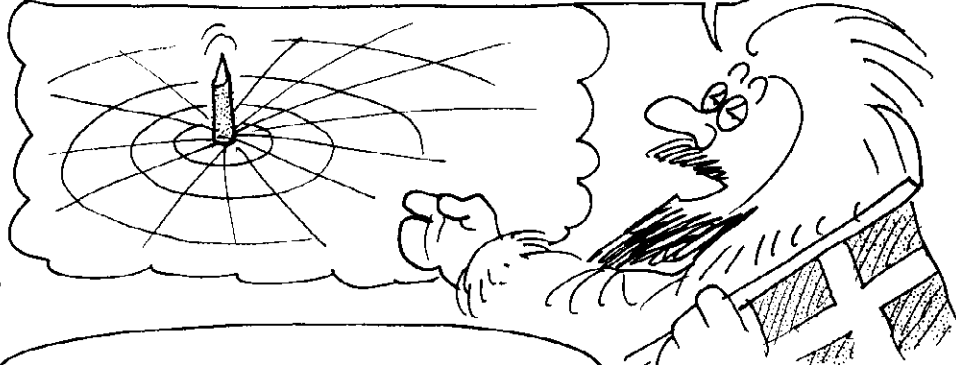




मोलस्कैमाउथ बिना कोई आवाज़ किये, बर्फ जमी मेरीडियंस पर फिसले.



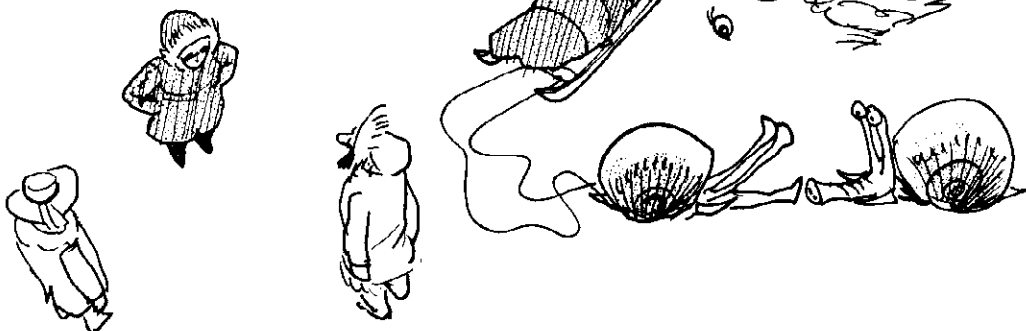
तुम्हारे जाते ही कुछ आश्चर्यजनक हुआ.  
मेरा झंडा अचानक गायब हो गया और  
"दक्षिण-ध्रुव" वाला झंडा बाहर निकला!



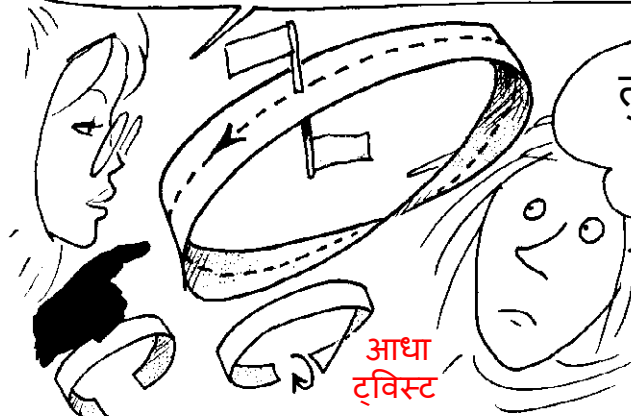
यह सब पागलपन है!

हाँ, पर तुमने यह क्यों पूछा?

लगता है मुझे समझ में आ रहा है.



यह स्पष्ट है कि यदि हम मेरीडियन का पड़ोस देखें तो वो सिर्फ एक ही सतह है (\*),  
जैसे वो मोबियस-स्ट्रिप (पट्टी) की सिंगल सतह हों।  
(देखें "हिअर इज़ लुकिंग एट यूक्लिड" पेज 54).



तुम्हारा मतलब है कि हम पहले जहां दक्षिणी-ध्रुव पर थे,  
वो असल में सिर्फ उल्टा उत्तरी-ध्रुव था?

तो फिर असली दक्षिण-ध्रुव कहाँ है?

बड़ी अजीब बात है!

तो क्या चल रहा है?

चलो  
सोचते हैं!

लगता है जैसे हमने  
दक्षिणी-ध्रुव खो दिया है.

बड़ा अच्छा!

वे क्या कह रहे हैं?

सोफी के अनुसार हम एक ऐसी गेंद पर हैं  
जिसकी केवल एक ही सतह है!

ये सरासर पागलपन है!

तुम जहाँ रहते हो  
वहाँ कैसा है?

(\*) एक पट्टी जिसके दोनों छोरों को  
आपस में चिपकाने से पहले आधा  
ट्विस्ट दिया जाता है, उस पट्टी की  
केवल एक ही सतह होती है.

हाँ, बिल्कुल यहाँ जैसे.

अगर हम मिस्टर अमंडसेन को उनकी कठिन स्थिति से बाहर निकालना चाहते हैं, तो पहले हमें इस अजीब ग्रह के आकार को समझना होगा. आइए हम टोपोलोजी के कुछ बुनियादी सिद्धांतों का उपयोग करें. उसके लिए, हम सभी वस्तुओं को अपघटित (डीकंपोज़) करेंगे:

## सिकुड़े हुए सेल

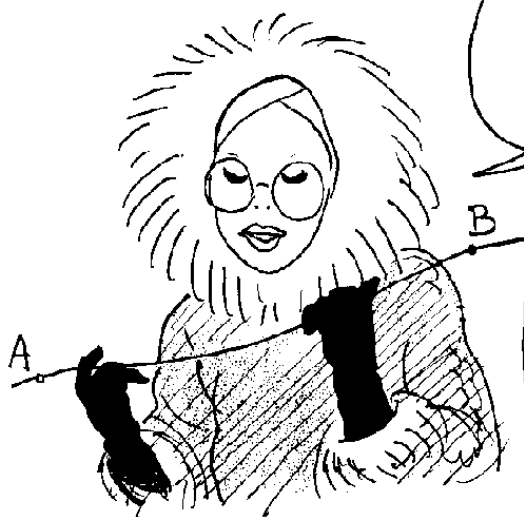
नष्ट न होने वाली यह वस्तु एक बिंदु लगती है ...

आप एक बिंदु के साथ क्या कर सकते हैं?

एक वस्तु, जिसे बिंदुओं का एक समूह माना जाता है, वो अंतरिक्ष में एक निश्चित स्थान ग्रहण करती है. वो "कॉन्टैक्टबिल" होगी अगर वो खुद सिमटकर और सिकुड़कर एक बिंदु बन सके.

इसके लिए एक वक्र की मिसाल लें. वो वस्तु एक-आयाम वाली है.

इस वक्र पर एक बिंदु की स्थिति को केवल एक मात्रा से दर्शाया जा सकेगा - जो वक्र पर बिंदु की, उसके मूल उद्गम से, लाइन के बीच की दूरी होगी.



मैं एक पोले पास्ता के अंदर वक्र का एक टुकड़ा डाल रहा हूं, जिससे वो अंदर जाकर सिकुड़ सके...

जैसे थर्मामीटर में पारा.

क्या हर वक्र सिकुड़ सकता है?

नहीं, बंद-वक्र नहीं सिकुड़ते हैं.

हाँ, लेकिन आप उसे काट सकते हैं!

ठीक है, लेकिन फिर कर्व (वक्र) एक सेगमेंट (खंड) बन जाता है. वो अब बंद नहीं रहता.

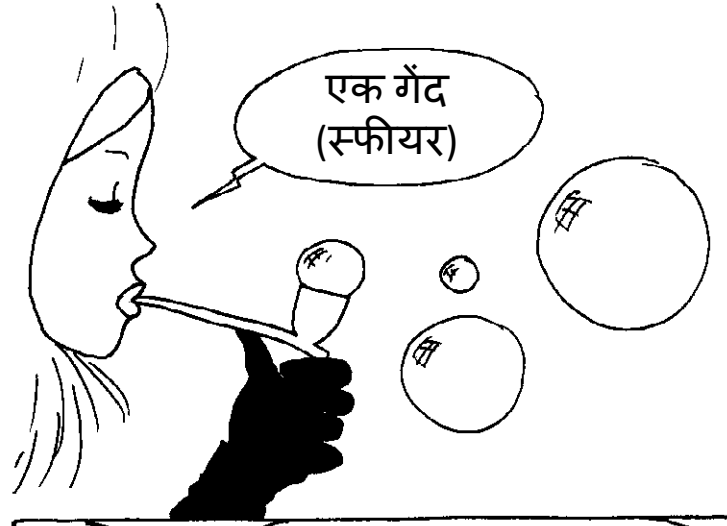
अगर मैं एक गोले का उदाहरण दूँ तो मैं उसे एक बिंदु में सिकोड़ सकता हूँ?

इसलिए गोला सिकुड़ता (CONTRACTILE) नहीं है और वही बात किसी बंद-वक्र के लिए भी सच है.

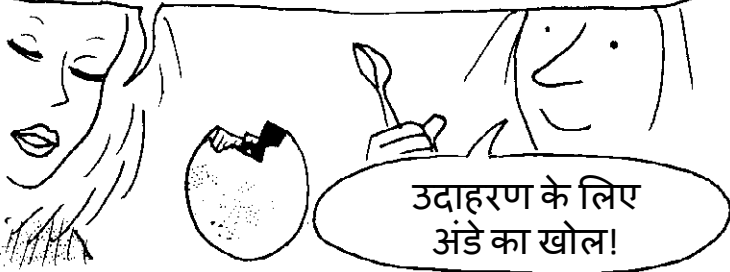
नहीं, उससे काम नहीं चलेगा क्योंकि वो अब खुद-के अंदर से नहीं गुज़रता है. वो बाहर की उस जगह में विकसित होता है जहाँ वो पहले था.

हालाँकि चकत्तियाँ (Discs) और सतहें सिकुड़ती हैं.

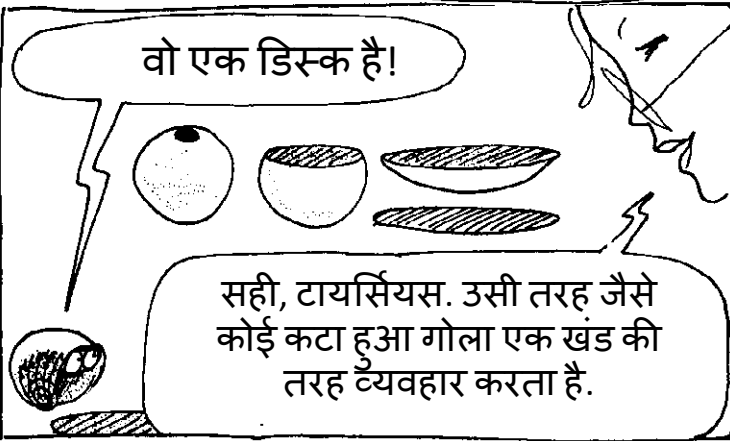
डिस्क की एक सतह होती है. इसलिए वो एक दो-आयाम वाली वस्तु है. ठीक! जैसे दो-आयाम एक डिस्क के लिए होते हैं वैसे ही गोला एक सेगमेंट के लिए होता है?



एक बंद-वक्र को सिकोड़ने के लिए आपको उसे तोड़ना होगा. यही बात किसी गेंद (स्फीयर) के लिए भी सच होगी.



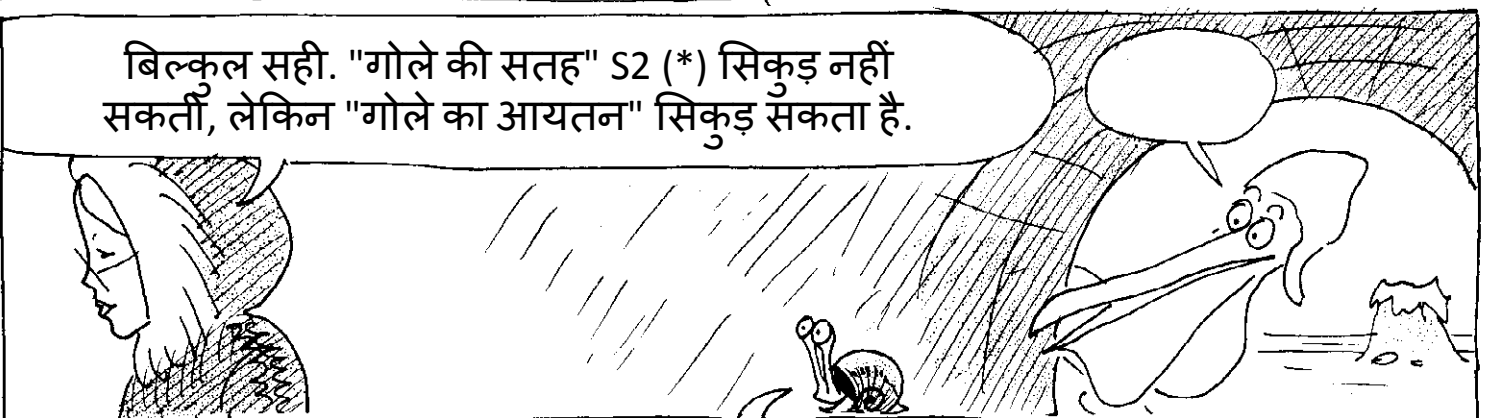
वो एक डिस्क है!



लेकिन सोफी, क्या गेंद या अंडे के अंदर का आयतन सिकुड़ सकता है?

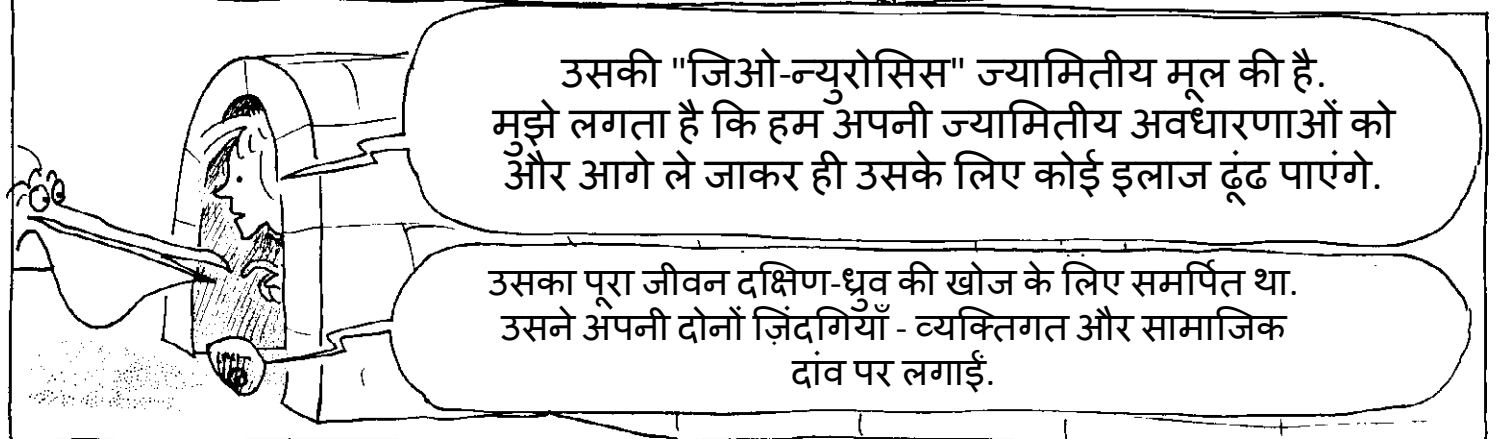
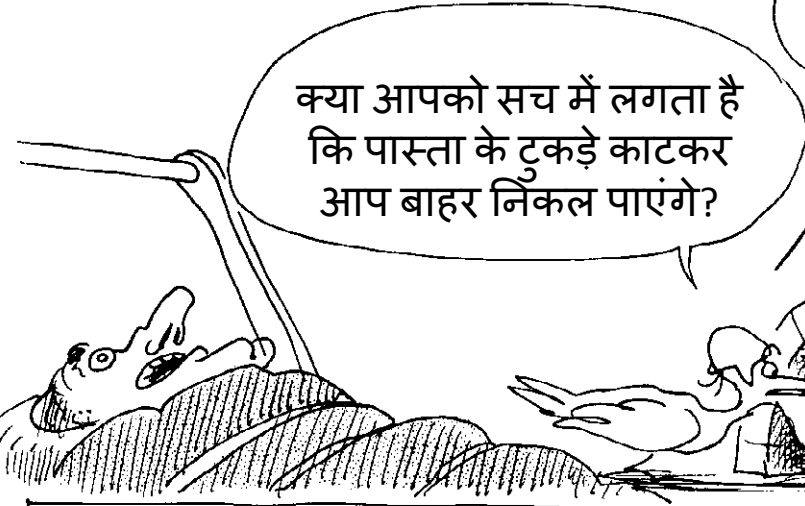
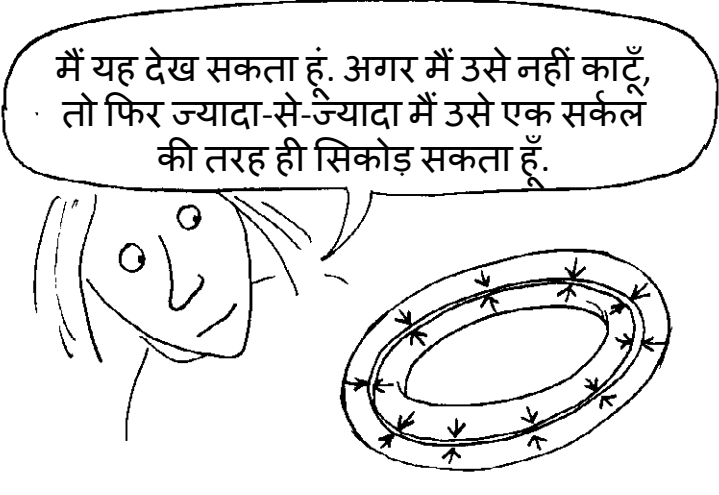


बिल्कुल सही. "गोले की सतह"  $S_2$  (\*) सिकुड़ नहीं सकती, लेकिन "गोले का आयतन" सिकुड़ सकता है.



यानि अंडे का खोल नहीं सिकुड़ता है, पर उसकी जर्दी सिकुड़ सकती है.

(\*) (\*) देखें: "हिअर इज़ लुकिंग एट यूक्लिड"



उसके दुस्साहस ने उसे एक ऐसी स्थिति में ला दिया, जिसे वो खुद नहीं संभाल सका.

अचानक वो अपने अस्तित्व के बारे में सवाल पूछने लगा!

यह बहुत अच्छा है, लेकिन असली सवाल यह पता लगाना है कि आखिर वो दक्षिण-ध्रुव कहां गया?

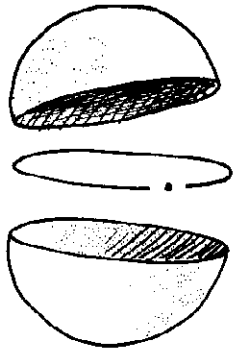
## सेल्युलर अपघटन

प्रत्येक ज्यामितीय वस्तु को उसके तत्वों में विघटित किया जाएगा, सभी आयामों में सिकुड़ने वाली कौशिकाएं : बिंदु, खंड, सतहें और आयतन आदि होंगे.

फिर "बिंदु" का क्या आयाम होगा?

हम "बिंदु" को शून्य आयाम का मान सकते हैं.

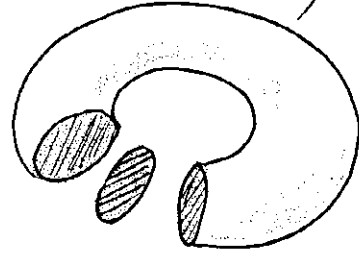
किसी सर्कल को विघटित करने के लिए आप उसे केवल एक खंड को एक "बिंदु" द्वारा बंद करने पर विचार करें. यदि मैं "बिंदु" हटाऊंगा तो फिर एक खंड ही बचेगा.



गेंद की सतह S2 को दो कैप और एक "बिंदु" से जुड़े सेगमेंट में विघटित किया जा सकता है.



और "टोरस आयतन" के लिए मुझे उसे सिर्फ एक डिस्क से काटना होगा.

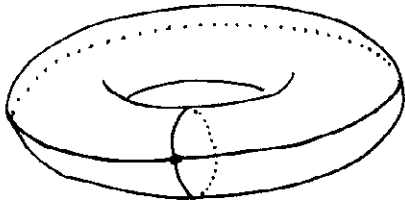
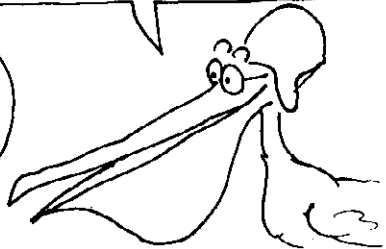
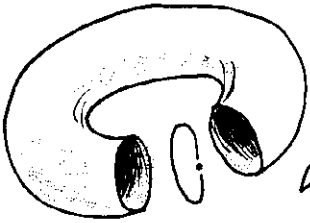


और "टोरस सतह" के लिए मैं उसे एक सर्कल से काटूंगा जो खुद एक बिंदु पर कटा होगा.

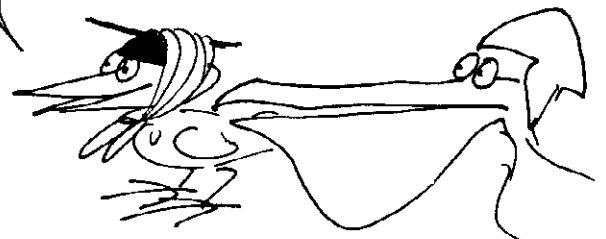
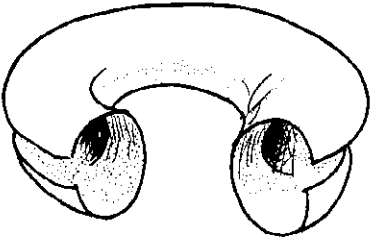
इस तरह काटे जाने वाला टोरस एक सर्कल में सिकुड़ जायेगा.



वो पहले एक खंड में विघटित होगा और बाद में बिंदु में.



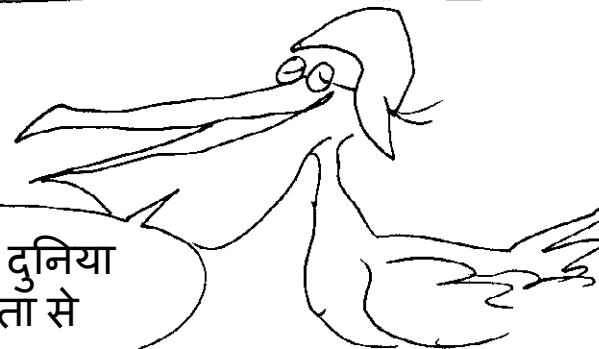
यहां एक बिंदु, दो खंडों और सतह का एक और हल है, जहां सभी तत्व सिकुड़े होंगे.



ठीक है, लेकिन उससे हमारा आखिर क्या भला होगा?



उसकी मदद से हम दुनिया को अधिक स्पष्टता से समझ पाएंगे.





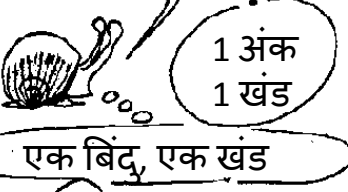
# औइलर-पोइनकेयर विशेषताएँ

## EULER-POINCARÉ CHARACTERISTIC



वस्तु को इस तरह से विघटित करने के बाद हम एक संख्या  $X$  बनायेंगे.  $X$  "बिंदुओं" की संख्या, में से खंडों की संख्या घटाकर, उसमें सिकुड़ने वाले सतहों की संख्या जोड़कर और सिकुड़ने वाले आयतन की संख्या घटाकर बनेगी (\*). फिर हम इस संख्या  $X$  को, औइलर-पोइनकेयर विशेषता बुलाएँगे.

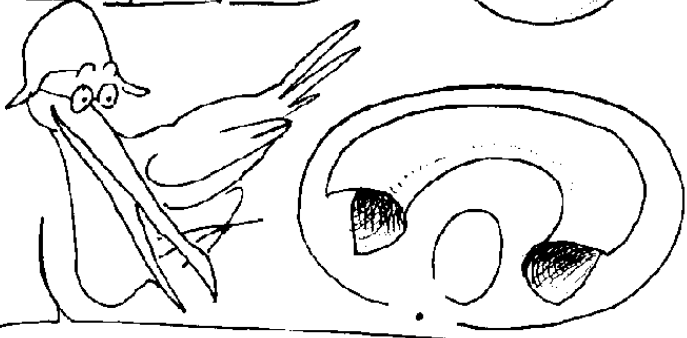
गोले (वृत्त) की  
 $X = 1 - 1 = 0$  होगी.



गेंद की सतह के लिए  
 $X = 1 - 1 + 2 = 2$  होगी.

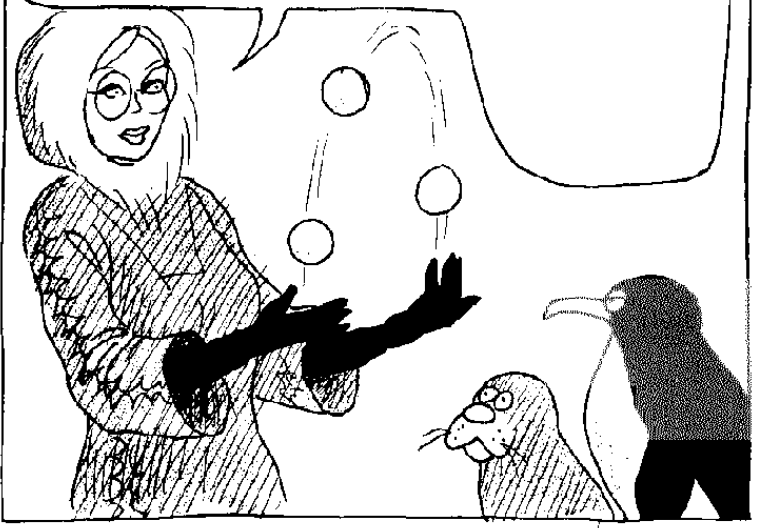


एक बिंदु, एक खंड,  
दो कैप्स



गेंद-आयतन की विशेषता स्पष्ट रूप से -1 होगी, जबकि टोरस-आयतन  $1 - 1 = 0$  होगा (पृष्ठ 4 के ऊपर दाईं ड्राइंग देखें)

टोरस-सतह के लिए, एक बिंदु,  
दो खंड, एक सतह के लिए  
 $X = 1 - 2 + 1 = 0$  होगी.



इसका मतलब 1 बिंदु, 2 खंडों और  
1 सिकुड़ने वाली सतह होगी.

(\* ) जो तुरंत तीन से भी अधिक आयामों तक फैलेगी (यह एक वैकल्पिक योग है).

अब ध्यान से सुनें: X की विशेषता उसके विघटन के तरीके से स्वतंत्र होगी (संकुचन कोशिकाओं में)!!

उदाहरण के लिए, इस बंद वक्र को आठ बिंदुओं से जुड़े, आठ खंडों में काटा गया है, लेकिन इसकी विशेषता अभी भी शून्य है.

निश्चित ही.

जरा स्फीयर के विघटन को देखें:  
4 शिखर, 6 खंड, 4 सतह,  
इसलिए  
 $X = 4 - 6 + 4 = 2$

और यहां,  
8 शिखर, 12 खंड,  
6 चेहरे; इसलिए  
 $X = 8 - 12 + 6 = 2$

आप किसी भी तरह से कोशिश करें, हर बार अंत में 2 ही आएगा.

बहुत बढ़िया!

अचरज भरा है!

यहां एक उपयोगी प्रमेय (थ्योरम) है: यदि कोई वस्तु दो वस्तुओं के मिलन से बनती है, तो उसकी विशेषता उसे बनाने वाली दोनों वस्तुओं का योग होगी.  
- प्रबंधन

टोरस-वॉल्यूम की विशेषता "शून्य" होगी.

यदि एक हैंडल जोड़ा जाए,  
तो उससे विशेषता में एक  
इकाई जुड़ेगी.

इसलिए फ़ोगैस-आयतन (FOUGASSE-VOLUME) (\*) की विशेषता उसमें पाए जाने वाले छेदों की संख्या से एक कम होगी.

मुझे लगता है कि  
फ़ोगैस-सतह FOUSASSE-SURFACE  
के लिए भी वो समान होगी.

\* फ़ोगैस : दक्षिणी फ्रांस में एक जैतून का तेल से बनने वाली एक डबलरोटी का नाम है.

हर्गिज नहीं! फ़ोगैस-सतह किसी  $N$  छेदों वाली डिस्क की तरह सिकुड़ नहीं सकती है. ज़रा गंभीर हों!

मैंने उड़ा दिया!



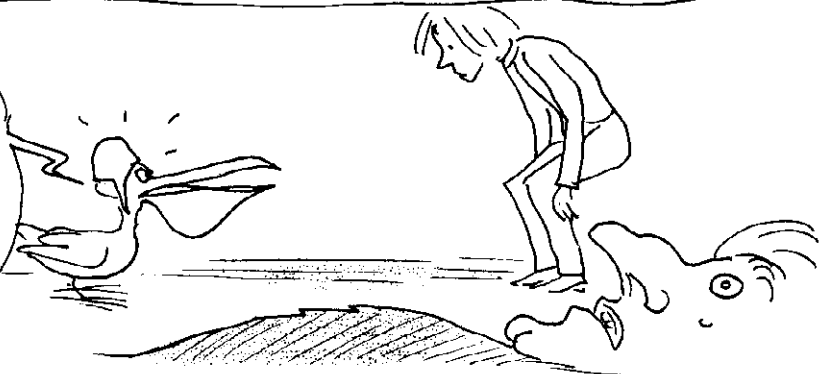
अब हम एक हैंडल जोड़कर - गेंद-सतह (विशेषता 2) से टोरस-सतह (विशेषता शून्य) तक जा सकते हैं. इसका मतलब हैंडल, सतह की विशेषता को, 2 इकाइयों से कम करता है.

इसलिए फ़ोगैस-सतह की विशेषता, छिद्रों की संख्या से दो कम होगी!

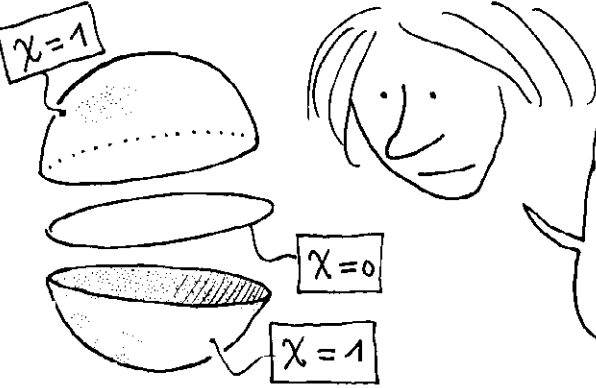
गुएरे-पनीर के एक टुकड़ा जिसमें  $N$  छेद हों में  $N$  गेंद-सतहें होंगी और अगर साथ में गोल बाहरी सतह भी हो, तो उसकी विशेषता  $X = 2(1 + N)$  होगी.

इसलिए एक गुएरे-आयतन बनाने के लिए, हम एक पूरी गेंद ( $X = 1$ ) से शुरू करेंगे और हम  $N$  टुकड़ों गेंद-आयतन + गेंद-सतह ( $X + 2 - 1 = 1$ ) को हटा देंगे. तब गुएरे-आयतन की विशेषता  $(1 + N)$  के बराबर होगी.

लेकिन आप अपनी इस बकवास से गरीब अमुंडसेन की जियो-न्युरोसिस को निश्चित रूप से ठीक नहीं कर पाएंगे!



# हम जिस दुनिया में रहते हैं



हम एक गेंद S2 की विशेषता की गणना - दो गोलार्धों और भूमध्य-रेखा के मिलन को मानकर कर सकते हैं, जो  $X = 1 + 1 + 0 = 2$  होगी.

"हिअर इज़ लुकिंग एट यूक्लिड" में हमने तीन-आयामों वाली एक हाइपर-गेंद (हाइपर-स्फीयर) S3 की अवधारणा प्रस्तुत की थी. वो एक तीन-आयामी स्थान था जो पूरी तरह से खुद पर बंद था.

चलें, इस हाइपर-स्फीयर एस S3 की विशेषता की गणना करें. जैसा कि हमने "हिअर इज़ लुकिंग एट यूक्लिड" में देखा कि भूमध्य रेखा (\*) एक गेंद S2 है जिसकी विशेषता का मान 2 है.



इसलिए हमारा हाइपर-स्फीयर S3, दो सिकुड़ने वाले आयतनों का बना है, जिसमें प्रत्येक का मान -1 है.

क्या तुम पागल हो?

$$X = -1 - 1 + 2 = 0$$

चुटकी!  
SNAP!

\* जो किसी वस्तु को दो समान तत्वों में अलग करता है.

फिर एक हाइपर-स्फीयर S3 की विशेषता शून्य होगी!

चलें, अब चार आयामों वाले हाइपर-स्फीयर S4 को देखें.



यह है हाइपर-स्फीयर स्पेस S3 जो समय (\*) में चक्रीय रूप से विकसित हो रहा है. इस हाइपर-स्फीयर S4 में - एक भूमध्य-रेखा, हाइपर-स्फीयर S3 और दो गोलार्ध होंगे, दोनों की गिनती 1 होगी.

तो इस स्पेस-टाइम में, हाइपर-स्फीयर S4 की विशेषता X, एक बार फिर से  $1 + 1 + 0 = 2$  होगी.

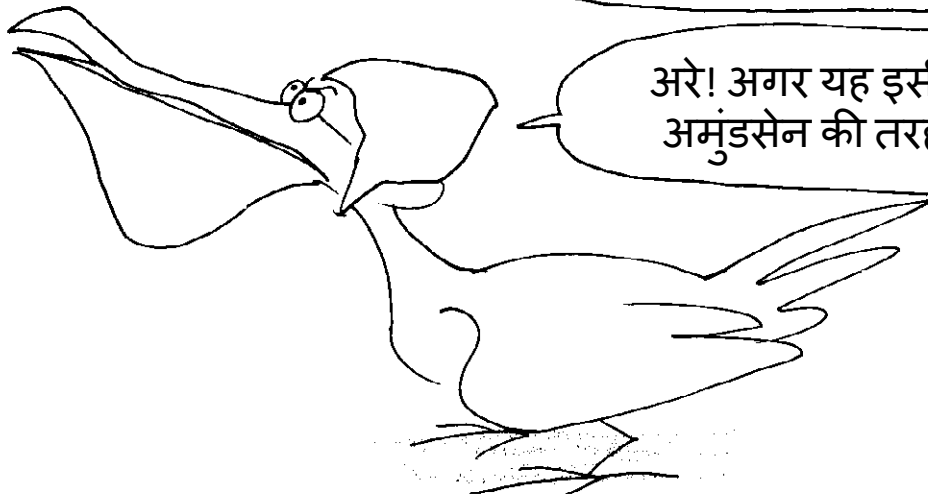
अगर आप पांच-आयामों वाला S5 हाइपर-स्फीयर लेंगे, तो उसकी विशेषता फिर से "शून्य" होगी और उसकी भूमध्य-रेखा एक S4 हाइपर-स्फीयर होगी.



और इसी तरह सिलसिला बढ़ेगा... इसलिए एक हाइपर-स्फीयर SN की औइलर-पोइन्केयर विशेषता 2 होगी यदि N सम होगा है, और यदि N असम होगी तो वो 0 होगी.



अरे! अगर यह इसी तरह चला तो फिर अमुंडसेन की तरह काम कर पाऊंगा.



(\*) बिग-बैंग (BIG-BANG) और फ्रीडमैन (FRIEDMANN) के मॉडल पेज 64 पर देखें

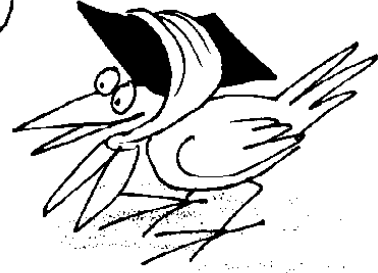
औइलर-पोइनकेयर विशेषता ने हमें ज्यामितीय वस्तुओं के इस घने जंगल में एक व्यवस्था लाने में मदद दी है.



इसलिए किसी सिलेंडर (बेलन) का अंत टोपोलोजी में एक छेद वाली डिस्क जैसा होगा और उसकी विशेषता "शून्य" होगी.

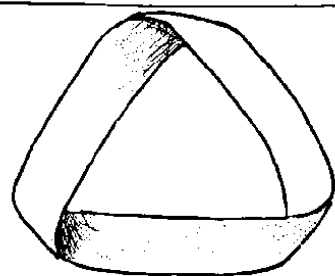
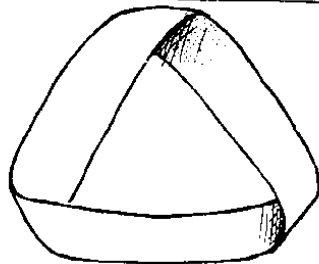


लेकिन आप इस वस्तु के बारे में क्या सोचते हैं?



यह एक मोबियस-स्ट्रिप या (पट्टी) है जिसकी केवल एक ही सतह है. इसलिए हम इसे "पीछे" या "आगे" की संज्ञा नहीं दे सकते. हम उन्हें "इन-ओरिएंटेबिल" कहते हैं.

वास्तव में कोई भी पट्टी जिसमें असम संख्या में ट्विस्ट हों "इन-ओरिएंटेबिल" मोबियस-स्ट्रिप होती है. लेकिन ये दोनों पट्टियां कुछ अलग ही लगती हैं ...



मैं चाहूँ उन्हें कैसे भी मोड़ें या घुमाऊँ, मैं उन्हें कभी भी समान नहीं बना सकता.

वे एक ही "दिशा" में नहीं घूर्णित हैं. असल में एक पट्टी, दूसरे की दर्पण-छवि है. हम इन्हें "इन्वैन्टिओ-मोर्फिक" कहते हैं.

बिल्कल जैसे मेरा बायाँ हाथ, मेरे दाहिने हाथ की दर्पण-छवि है.

इस तरह की सब पट्टियाँ, जो एक बंद-वक्र की तरह सिकुड़ सकती हैं, की विशेषता 0 होगी.

बेशक, N आयामों (\*) वाली "इन-ओरिएंटेबिल" स्पेस भी होती हैं.

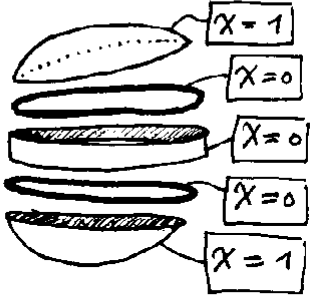
एक मोबियस-स्ट्रिप (पट्टी) एक "इन-ओरिएंटेबिल" सतह है जिसकी एक किनार है. क्या इस प्रकार की "इन-ओरिएंटेबिल" सतहें होती हैं जिनकी कोई किनार नहीं होती और जो खुद पर बंद होती हों?

उत्तर, अगले अध्याय में देखें.

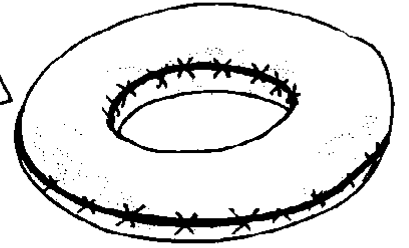
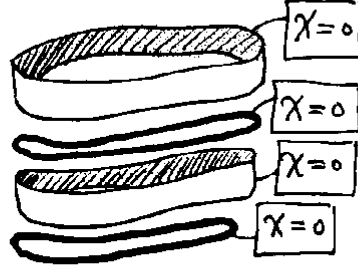


# किनार-पर-किनार

क्लोज़्ड-कर्व (एक खंड और एक बिंदु में विघटित) में एक विशेषता शून्य होती है. एक पट्टी, द्विपक्षीय या एकतरफा में भी वही होता है, जिसे एक बंद-वक्र के अनुसार सिकोड़ा जा सकता है (देखें प्रमेय, पेज 17). जब दो बंद-वक्र, दो डिस्क के साथ एक द्विपक्षीय पट्टी पर बंद होती हैं, तब हम एक स्फीयर-सतह  $S^2$  बनाते हैं (दो-आयामों वाला).

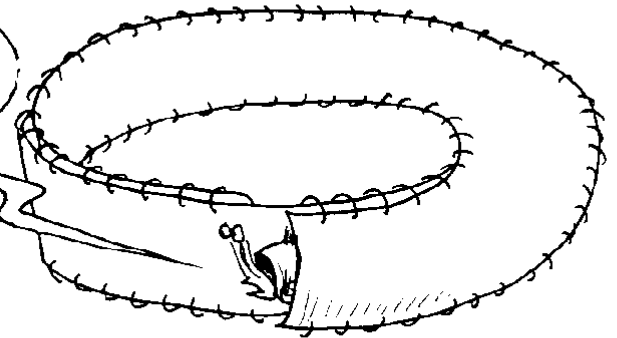


हम दो बंद स्ट्रिप्स को एक-दूसरे के साथ दो बंद-वक्रों पर बांध सकते हैं और तब हमें एक टॉरस-सतह  $T^2$  मिलेगी.



इसलिए मुझे सिर्फ एक बंद-वक्र के साथ दो मोबियस-स्ट्रिप्स सिलने में सक्षम होना चाहिए.

अरे! मैं फंस गया हूँ



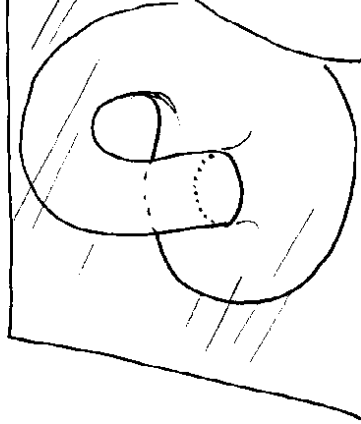
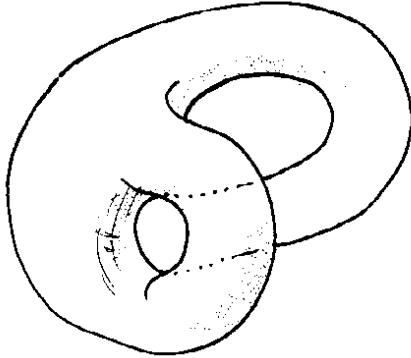
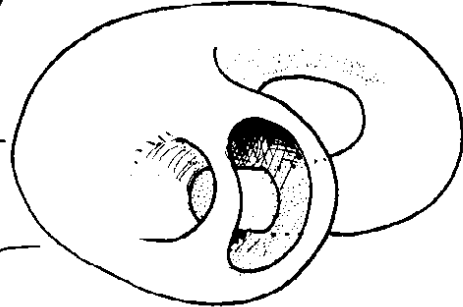
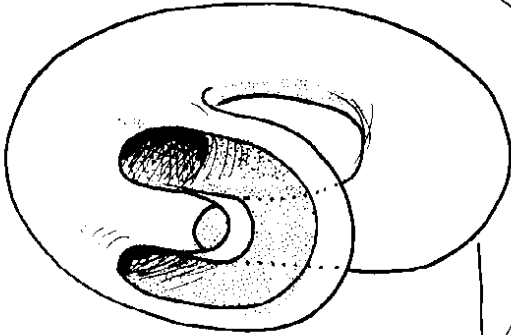
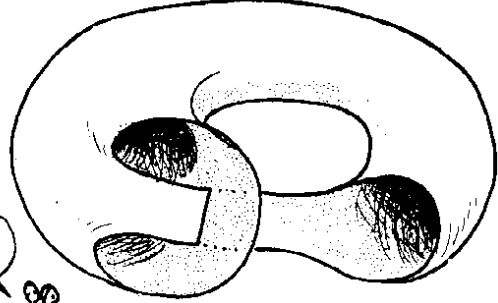
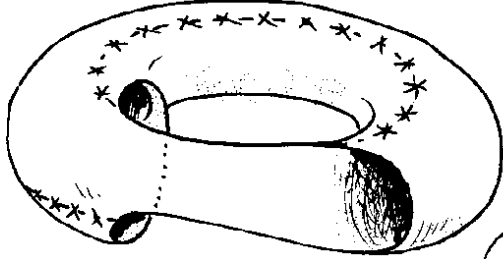
हमें किसी ट्रांसवरसाइन (TRANSVERSINE) (\*) का उपयोग करना चाहिए.

ट्रांसवरसाइन!?

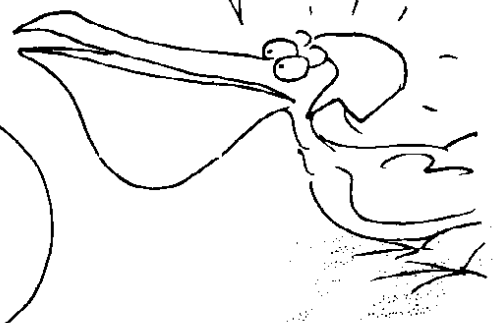


(\*) ट्रांसवरसाइन को होमोमोल्स के खोल (शेल) से निकाला जाता है.

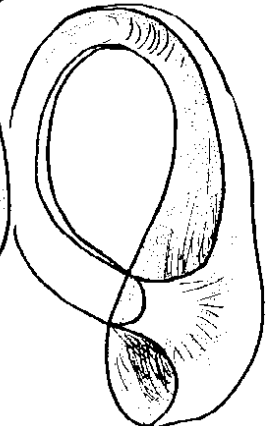
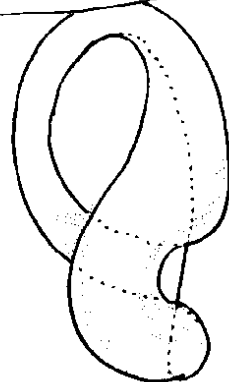
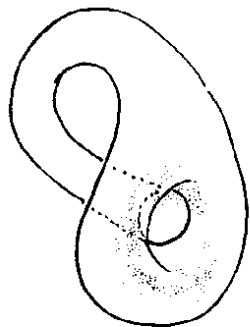
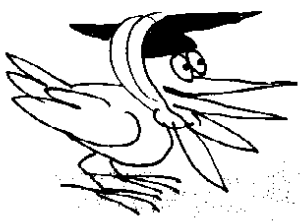
यदि हम ट्रांसवरसाइन को एक शेल पर पोतें तो वो उसकी किनार के अनुसार बढ़ना शुरू कर देगा, फिर वो एक बंद सतह बनाने के लिए प्रवृत्त होगा लेकिन वो उस सतह को, खुद में से गुजरने की अनुमति देगा!



किनार तो गायब हो गई है, लेकिन वो गोल सी चीज़ क्या है?

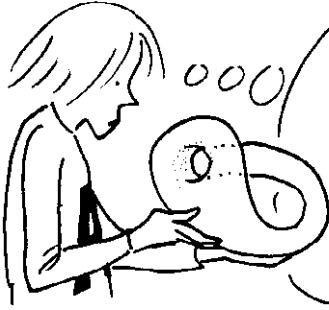
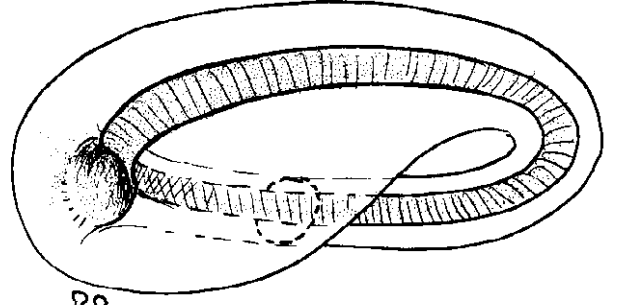


वो ऑटो इंटरसेक्टिंग-वक्र है, जो एक किनार नहीं है. आप उसका सत्यापन एक क्लाइन-बोतल से कर सकते हैं, जहां सतह लगातार हर जगह विकसित होती है.



दो  
क्रॉस-  
सेक्शन

इसकी विशेषता शून्य है क्योंकि यह दो मोबियस-स्ट्रिप्स ( $X = 0$ ) और एक बंद वक्र ( $X = 0$ ) से बनी है. इनमें से किसी में भी आपको रास्ता खोजना आसान नहीं होगा.



बेशक, अगर आपको सतह पर एक मोबियस-पट्टी मिलती है, तो इसका मतलब होगा कि उसका केवल एक ही पक्ष होगा.

मुझे बताओ टायर्सियस, क्या हमें तुम्हारे शेल (खोल) पर मोबियस पट्टी नहीं मिल सकती है?

तुम दोनों फिर मत शुरू करो.

क्या?

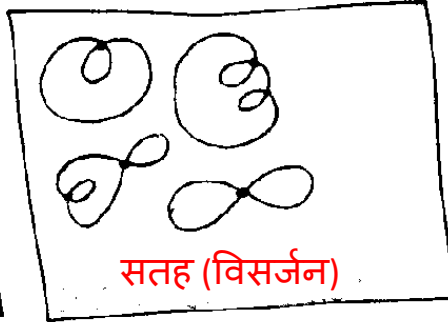
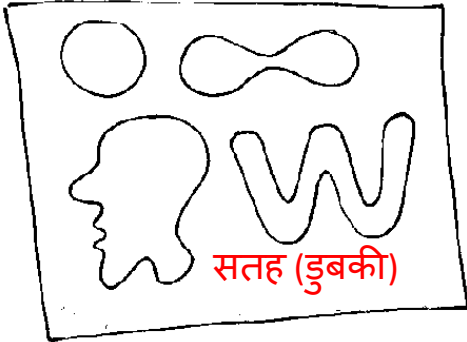
वो एक बहुत अजीब किस्म की सतह है.

अब तक हमने केवल उन्हीं सतहों पर छुआ है जो सामान्य रूप में एक-दूसरे को नहीं काटती हैं, जैसे कि गेंद (स्फीयर). जो सतह हमारी जगह में एक-दूसरे को काटती हैं उन्हें विसर्जन (IMMERSIONS) कहा जाता है.

विसर्जन?

# डुबकी (Plunge) और विसर्जन (Immersion)

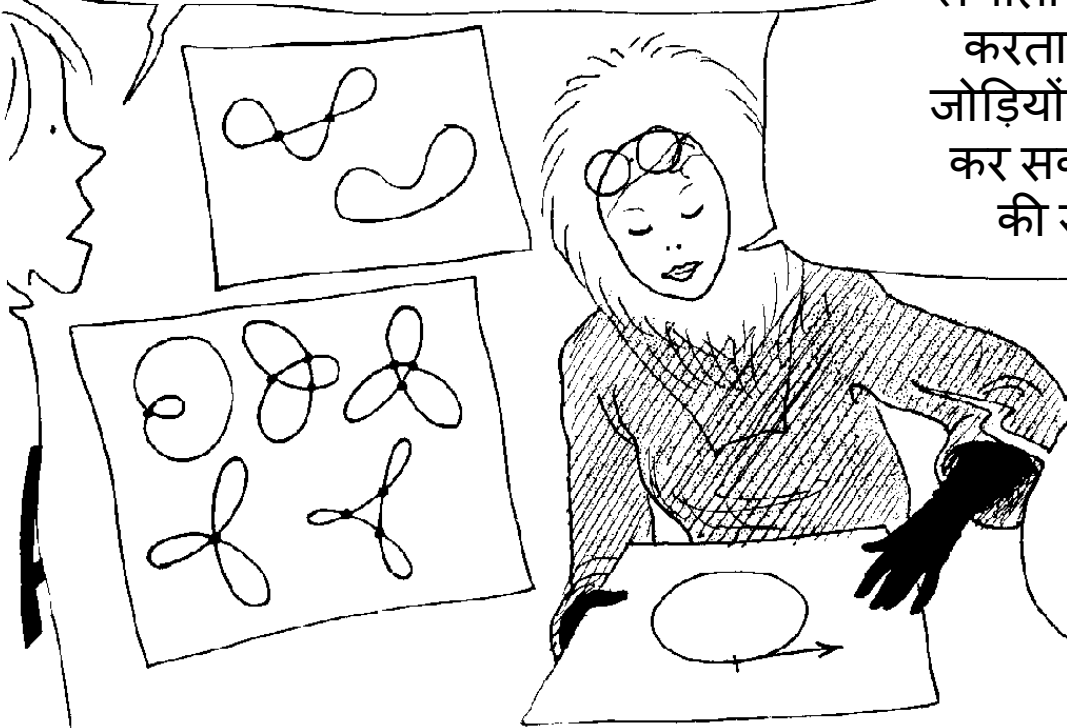
एक बंद वक्र, जिसकी ज्यामितीय एक-आयामी हो, जिसके रास्ते में कोई दोष न हो और जिसकी खास विशेषता - उसका कोई शुरु या अंत हो, को किसी भी प्लान पर अनंत तरीकों से रखा जा सकता है।



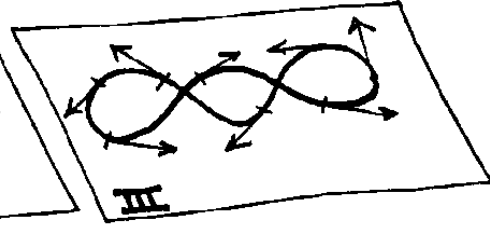
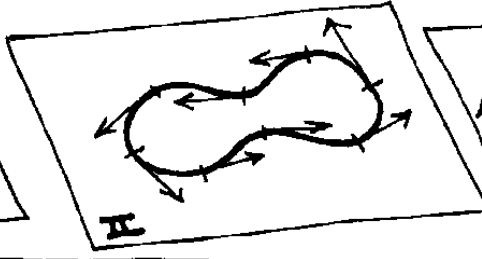
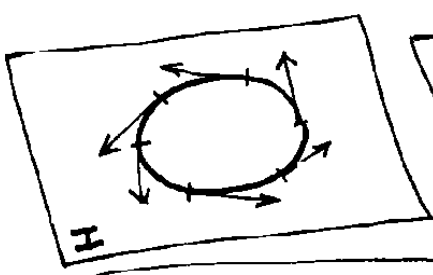
जब वो खुद अपने को नहीं काटता है, तो मैं कहूंगा कि उसने सतह में डुबकी लगाई है, अन्यथा मैं कहूंगा कि वो विसर्जन (\*) है।

मुझे लगता है कि वे अन्तर्विभाजक बिंदुओं (इंटरसेक्टिंग पॉइंट्स) की संख्या पर निर्भर करेगा।

नहीं, क्योंकि अगर मैं लगातार इन वक्रों को विकृत करता हूँ तो मैं बिंदुओं की जोड़ियों को प्रकट और गायब कर सकता हूँ। लेकिन मोड़ों की संख्या वही रहेगी।



देखो, मैं एक वेक्टर बना रहा हूँ जो वक्र की स्पर्श-रेखा होगी।



एक प्लेन के नियमित विरूपण (बिना रेखाओं को तोड़े) में वक्र I से वक्र III तक जा सकता हूँ. ऐसा करते समय प्रत्येक वक्र को पार करते समय तीर का कुल रोटेशन ( $360^\circ$ ) होगा.

यह प्लेन में एक नियमित होमोटोपिया (REGULAR HOMOTOPIA) है. इसमें मुड़ते तीर, वक्र के साथ स्पर्श-रेखा बनाते हैं.

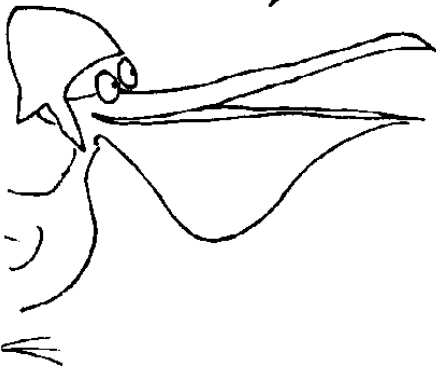
मैंने बहुत प्रयास किए पर मैं अंक आठ (8) को एक गोले में नहीं बदल पाया!

यह सामान्य है. तीर उतनी बार नहीं मुड़ता है. अंक आठ (8) का बीजीय योग, शून्य होगा!

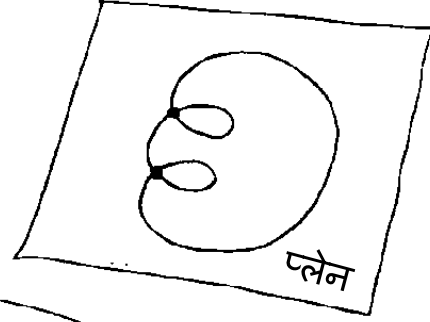


बंद-वक्र विरूपण (निरंतरता, नियमितता) के इस नियम को देखते हुए, कुछ चीजें संभव हैं और कुछ एकदम असंभव.

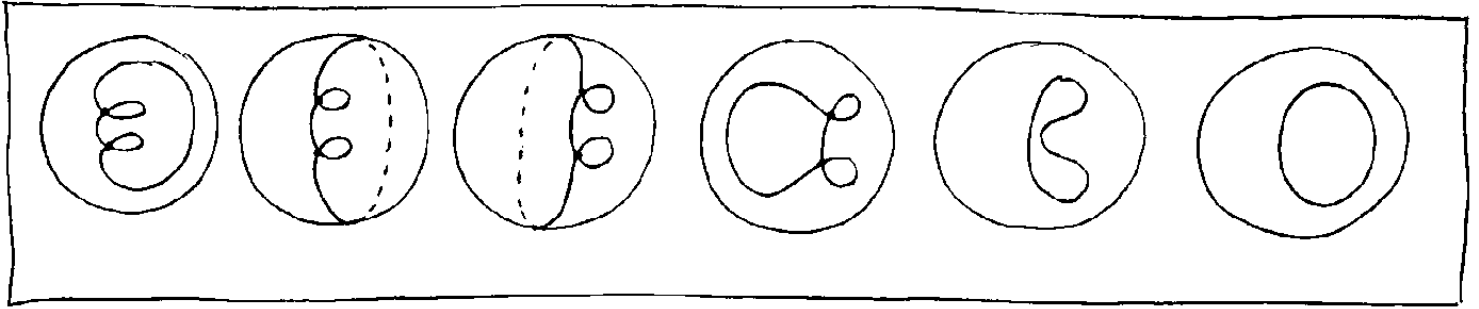
यह इतना आसान नहीं है!



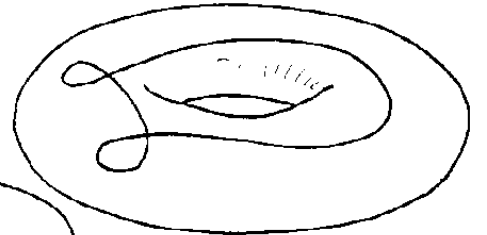
यह वस्तु को दर्शाने वाले स्थान पर निर्भर करता है. उदाहरण के लिए इस वक्र को देखें. इस प्लेन में दिखाए दोनों बिंदुओं से छुटकारा पाने का कोई तरीका नहीं है.



लेकिन एक गेंद (स्फीयर) पर ..

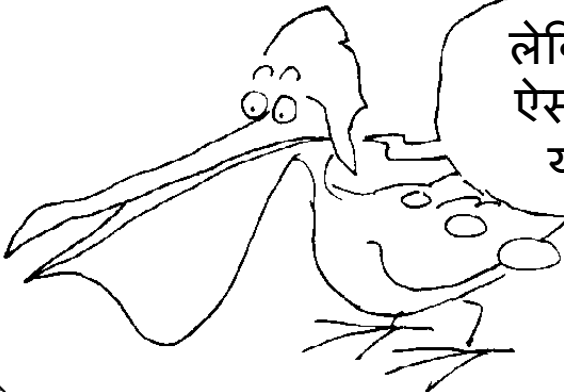


इसलिए कुछ चीजें जो एक तरह की दर्शाने वाली स्पेस में असंभव प्रतीत होती हैं (यहाँ प्लेन) किसी दूसरी स्पेस में टोपोलाजी को बदलकर संभव हो सकती हैं.



इस प्लेन में, वक्र आसानी से पहले जैसा बनाया जा सकता है, पर अगर यह टोरस पर प्रदर्शित होगा तो आप इसे नहीं कर पाएंगे.

लेकिन टायर्सियस, हमारे स्पेस-टाइम में ऐसी चीजें हैं जो निश्चित रूप से संभव हैं या निश्चित रूप से असंभव हैं, क्यों?



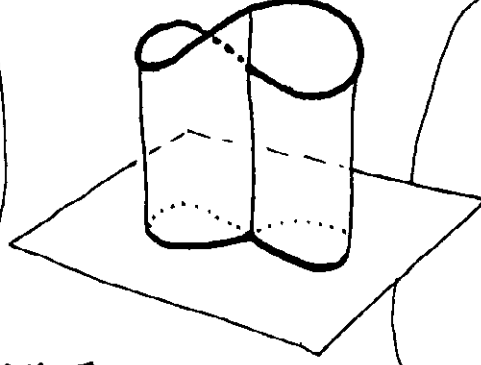
यह चिंताजनक है ...

क्या आप हमारे स्पेस-टाइम की टोपोलाजी को जानते हैं?

नहीं...

हम सिर्फ दिखावे के लिए जीते हैं ...यहां तक कि ...

बंद-वक्र के प्रतिच्छेदन (intersecting) बिंदु केवल सतह पर दिखाई देते हैं. उनकी द्वि-आयामी छवि केवल एक प्रक्षेपण है.



मौलिक रूप से इस सब में केवल एक ही वस्तु है: एक-आयामी बंद-वक्र.



4-आयामों वाली स्पेस में "क्लाइन-बोतल" अब खुद को नहीं काटती है!

इसलिए स्पेस बदलकर मैं कुछ भी बदल सकता हूं. उदाहरण के लिए मैं एक "क्लाइन-बोतल" को एक गेंद (स्फीयर) में बदल सकता हूँ?

नहीं, यह ऐसी विशेषताएँ हैं जो दर्शाने वाली स्पेस से स्वतंत्र हैं.

# टोपोलॉजी

जैसे कि औईलर-पोइन्केयर  
की विशेषता, दिशा, निकटता.

एक-आयाम की वस्तुओं के लिए  
इसका मतलब होगा :  
वक्र खुला होगा या फिर बंद होगा.

फिर अमुंडसेन का क्या?

कुछ नहीं, अभी वैसा ही ...

जिओ-न्युरोसिस?  
नहीं, मुझे इसमें टोपो-न्युरोसिस  
नज़र आता है.

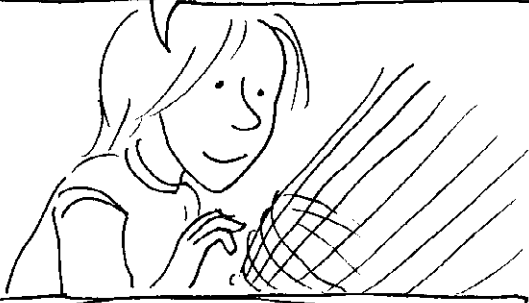
हमारी मानसिक संरचनाएं, हमारा तर्क, दुनिया के बारे में हमारी  
धारणा, ज्यामिती की नींव पर टिकी है, जो कभी भी ढह सकती है.

हम अपने दोस्त के नज़रिए में कुछ भी बदल नहीं ला सकते हैं.  
वो इस सांसारिक दुनिया को हमेशा नकारता रहा है.

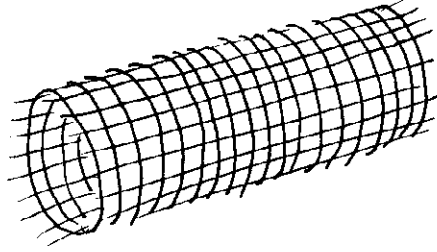


# टोकरी बुनना

मैंने सतहों को दर्शाने का एक और अच्छा तरीका खोजा है: टोकरी की बुनाई में!



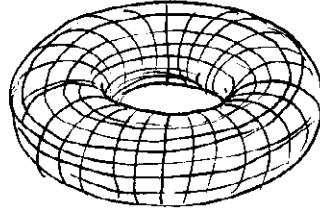
वैसे वो एक सिलेंडर है.



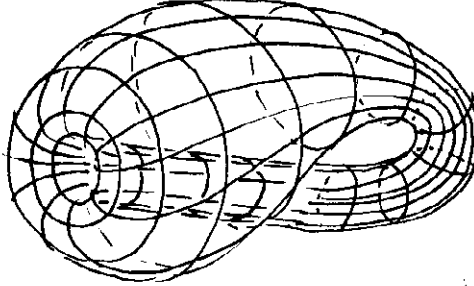
देखो, गेंद बनाना इतना आसान नहीं होगा.



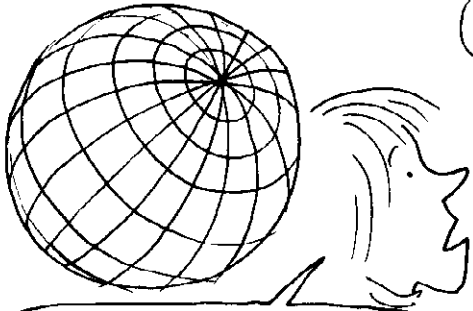
और टोरस?



और क्लाइन-बोतल?



गेंद (स्फीयर) के लिए तुम्हें दो ध्रुव फिट करने होंगे.



मुझे यह समझ नहीं आया.  
मुझे टोरस या क्लाइन-बोतल के लिए तो उनकी जरूरत नहीं पड़ी थी...

औईलर-पोइनकेयर की विशेषता से आपको उन ध्रुवों की संख्या ज्ञात होगी, जो आपको सतह बनाने में लगेंगे. टोरस या क्लाइन-बोतल के लिए यह संख्या शून्य होगी, जबकि गेंद (स्फीयर) के लिए वो 2 होगी.

इस अवधारणा को पाठ्यक्रम की हाइपर-सतहों (HYPER-SURFACES) तक बढ़ाया जा सकता है, जैसे 3,4..N आयामों के क्षेत्रों में.

अगर हमने कोई भूल न की हो तो फ्रीडमैन (\*) के अनुसार ब्रह्मांड, एक S4 हाइपर-स्फीयर का एक चक्रीय मॉडल है. इसलिए मुझे लगता है कि हम ऐसे घनों का उपयोग कर एक तीन-आयामी संरचना बना सकते हैं. पर 4-आयामों के लिए हम क्या करेंगे?

आप आसानी से उन्हें हाइपर-क्यूब से रच सकते हैं.

हाइपर-क्यूब?  
सच में.....

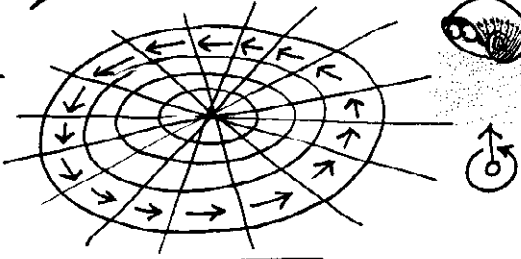
लेकिन, देखें ... S4 हाइपर-स्फीयर की विशेषता 2 है. इसलिए हमारा स्पेस-टाइम, कम-से-कम एक "सिंगुलैरिटी" या ध्रुव (पोल) तो दिखाएगा ही?

फिर बिग-बैंग (\*) सिद्धांत का क्या होगा?!

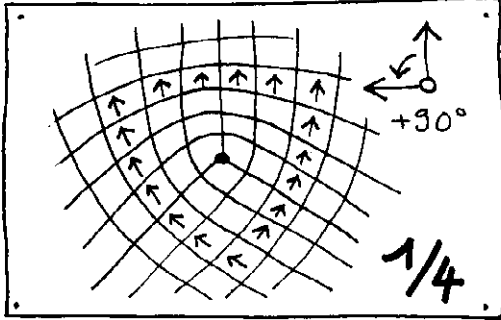
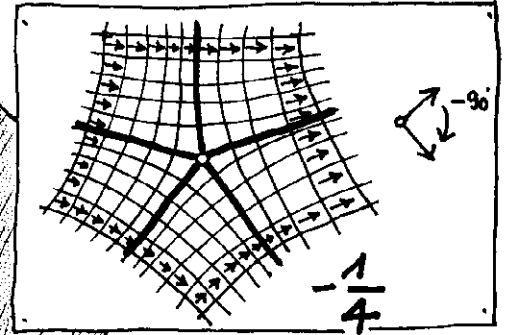
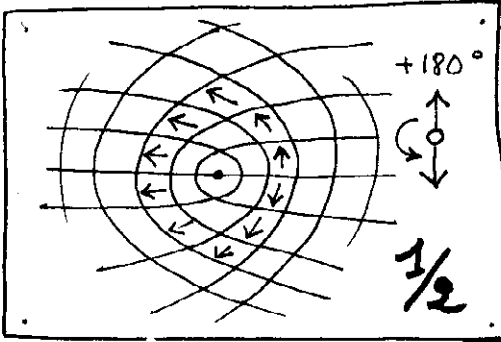
विशुद्ध रूप के ज्यामितीय विचारों ने हमें दुनिया के इतिहास के सबसे शानदार पहलुओं में से एक को देखने की अनुमति दी है, जिसकी खोज भी ब्रह्मांड के विस्तार के समय ही हुई होगी.

# सिंगुलैरिटी (Singularity)

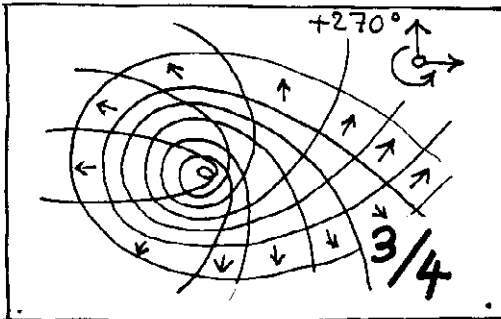
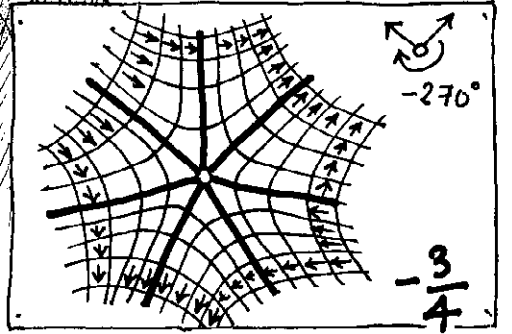
किसी भी बुनाई की सिंगुलैरिटी तीर की दिशा के कोण (सकारात्मक या ऋणात्मक) को  $360$  डिग्री ( $2\pi$ ) द्वारा भाग करने पर मिलेगी.



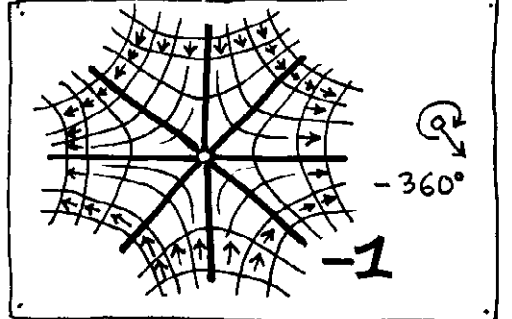
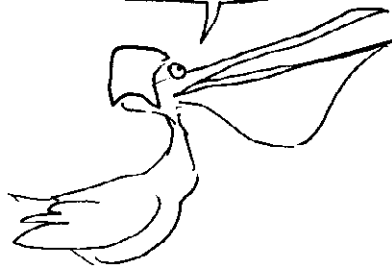
ध्रुव (POLE) 1 है.



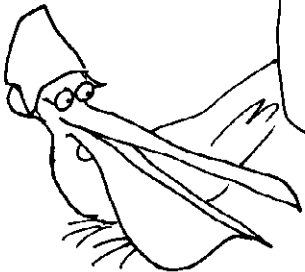
यहाँ, बाईं ओर एक सकारात्मक क्रम की सिंगुलैरिटी हैं, और दाईं ओर ऋणात्मक क्रम की.



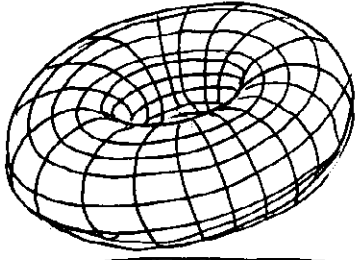
क्या मतलब?



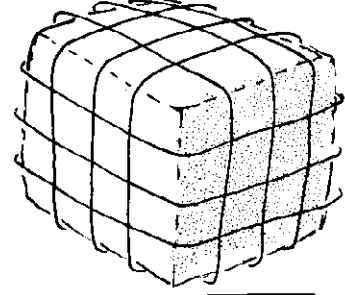
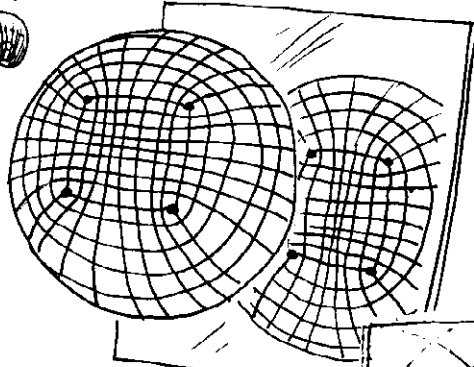
यदि आप एक बंद सतह बनाते हैं, तो अंततः आपके पास सिंगुलैरिटी होंगी. उसकी औईलर-पोइन्केयर विशेषता, सिंगुलैरिटी के योग के बराबर होगी.



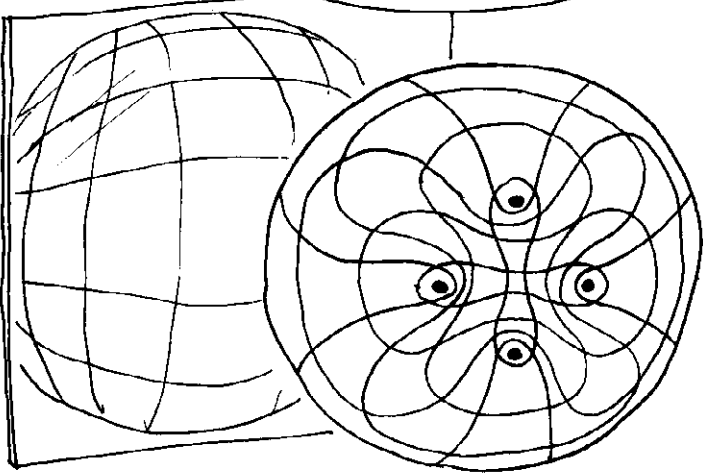
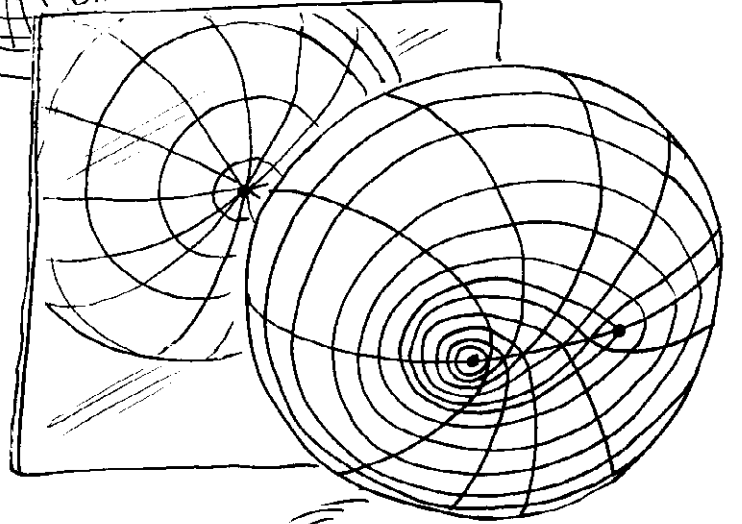
मैं सिंगुलैरिटी के बिना एक टोरस की बनाई कर सकता हूँ.  
यह सामान्य है और इसकी औईलर-पोइन्केयर विशेषता शून्य होगी.



यहाँ एक ग्रिड वाली गेंद है जो 1/4 आर्डर की आठ सिंगुलैरिटी का उपयोग करती है ...



या 3/4 सिंगुलैरिटी के साथ, और आर्डर 1/4 और एक ध्रुव के साथ ...



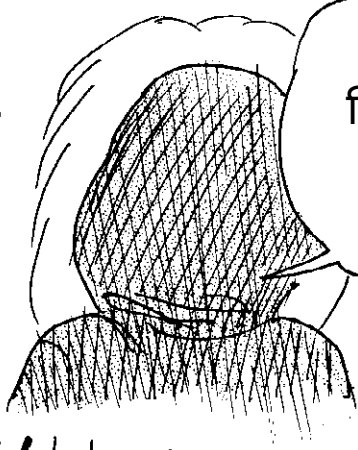
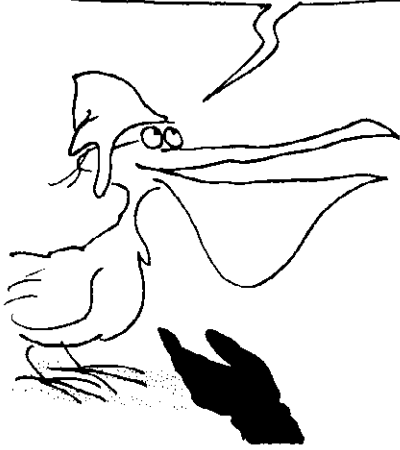
या फिर आर्डर 1/2 की चार सिंगुलैरिटी के साथ



ध्यान दें :

जिन लोगों ने ब्लैक-होल्स (BLACK HOLE'S) पुस्तक के पेज 14 से 36 पढ़े हैं, उन्हें उन चित्रों में और इन चित्रों के POSICONES, NEGACONES और वक्रों के बीच बहुत समानता दिखाई दी होगी. ये सभी विचार, अनिवार्य रूप से कोणीय (ANGULAR) हैं जो किसी सतह की कुल वक्रता (TOTAL CURVATURE) से घनिष्ठ रूप से जुड़े हैं, जो हमारे तीन-आयामी स्पेस में दर्शाया गए हैं, और जो औईलर-पोइन्केयर विशेषता को 360 डिग्री (या  $2\pi$ ) से गुणा के बराबर होगी.

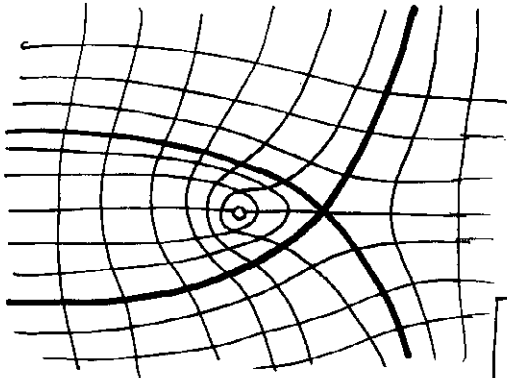
अफ़सोस की बात है कि ऐसी चीजें बिल्कुल बेकार हैं - जैसे ग्रीक और लैटिन.



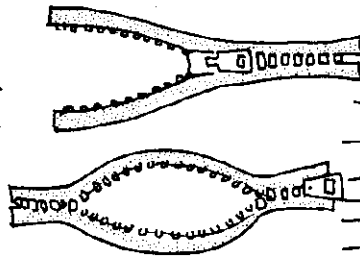
ऐसा बिल्कुल नहीं है  
लियोन! हमारी प्रकृति  
में भी तमाम  
सिंगुलैरिटी हैं!



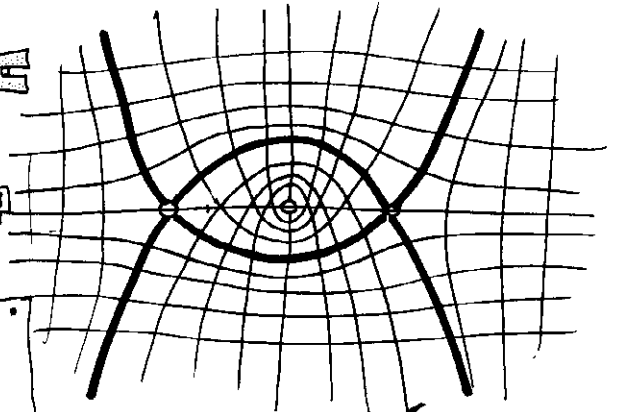
कहाँ?



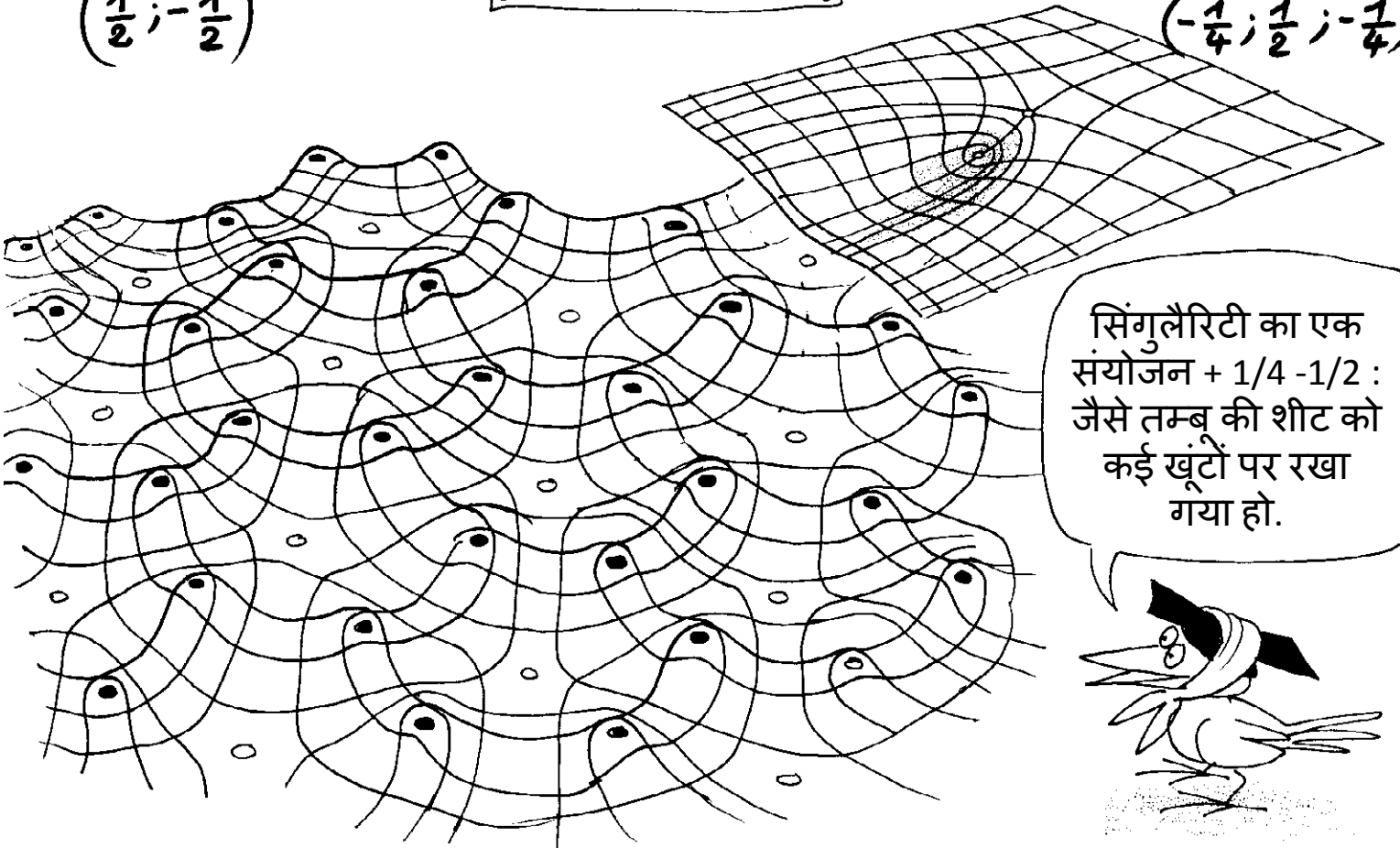
$(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$



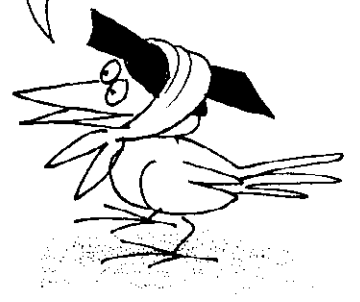
एक जिप फास्टनर  
खींचकर अलग करो.



$(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$



सिंगुलैरिटी का एक  
संयोजन  $+1/4 - 1/2$  :  
जैसे तम्बू की शीट को  
कई खूंटों पर रखा  
गया हो.

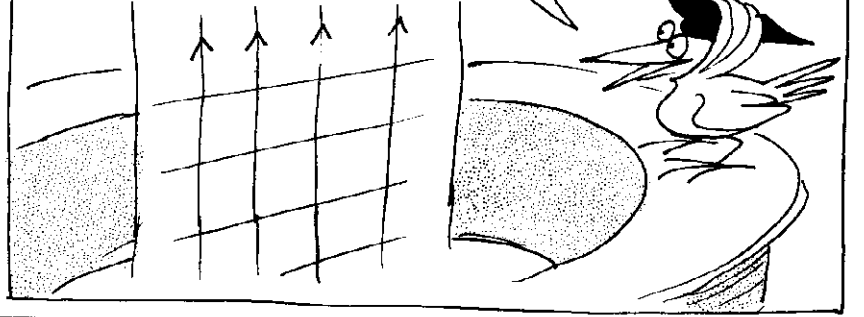


अब क्या बना रहे हो?

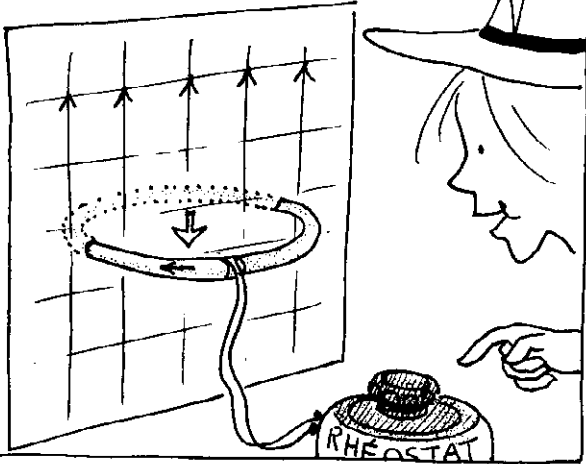


चुंबकीय क्षेत्र

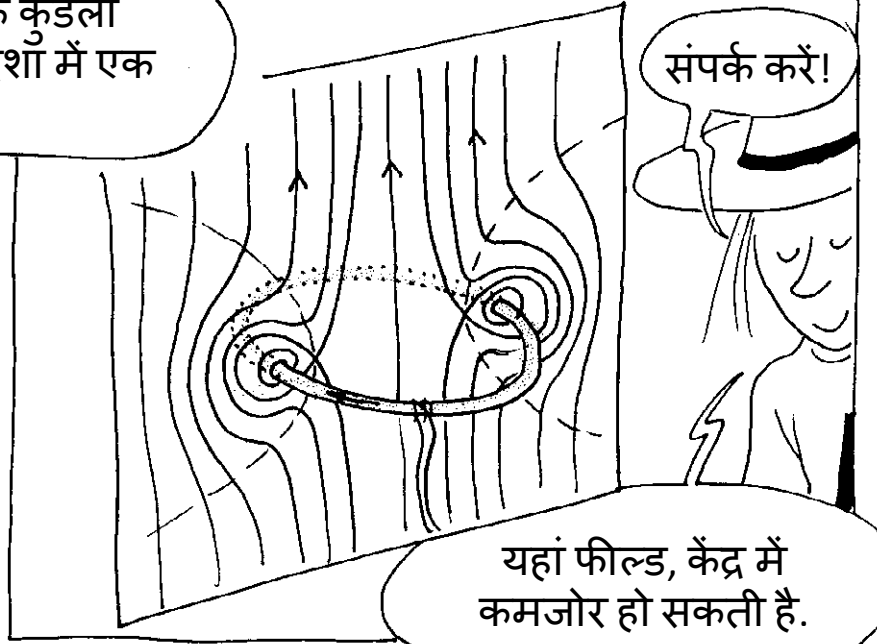
यह प्रणाली एक समरूप चुंबकीय क्षेत्र बनाती है, और उसकी रेखाएँ और क्षेत्र एकदम सरल समानांतर सीधी रेखाएँ हैं.



लेकिन अगर मैं इस फील्ड में एक कुंडली (coil) डालूँ तो वो केंद्र में विपरीत दिशा में एक और फील्ड बनाएगी.

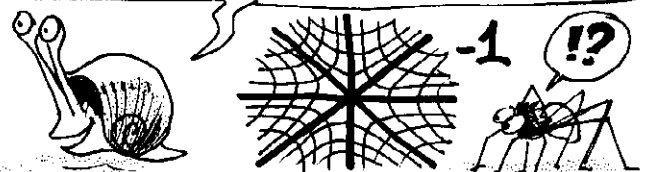
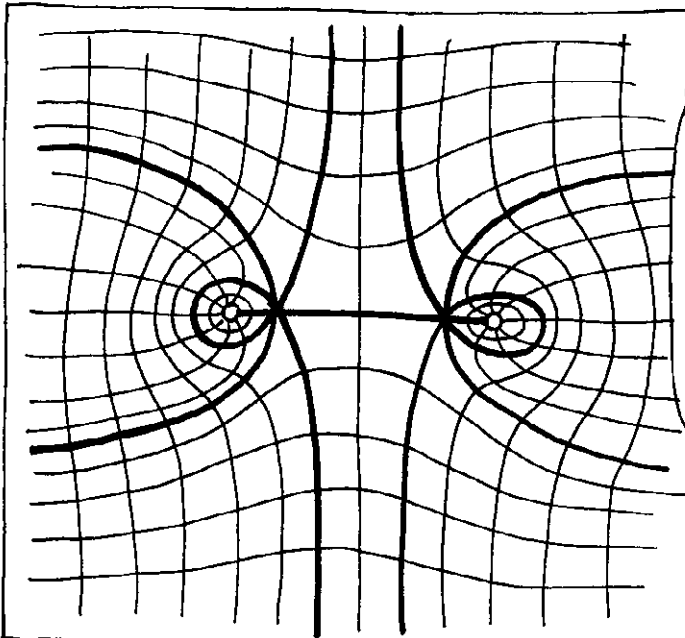


संपर्क करें!



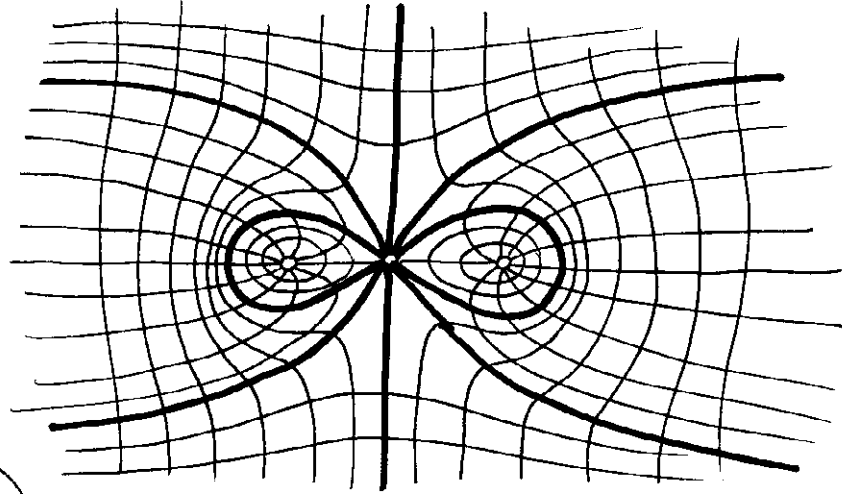
यहां फील्ड, केंद्र में कमजोर हो सकती है.

ओह! आपने दो ध्रुव बनाये हैं (सोलेनोइड के निशान चित्र 1 में सामने से देखें) और दो सिंगुलैरिटी 1 आर्डर की हैं. उनका योग शून्य होगा. नकारात्मक सिंगुलैरिटी तब दिखाई देती हैं जहां B फील्ड रद्द होती है.

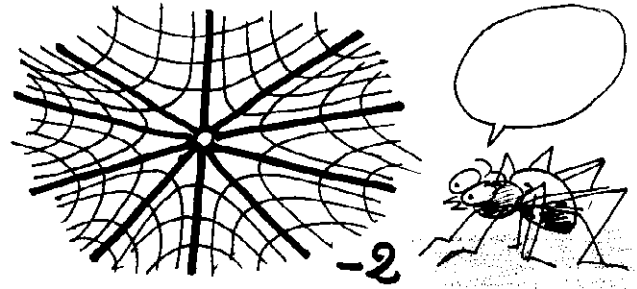


वास्तव में इस प्रणाली में घूमने (चक्कर लगाने) की समरूपता है और हमारे पास एक जाल का उदाहरण है जिसमें सिंगुलैरिटी की रेखाएँ हैं।

मैं अब करंट बढ़ा रहा हूँ ताकि सोलनाइड के केंद्र की चुंबकीय फील्ड रद्द हो जाए।



"शून्य" फील्ड के सामने से दिखने वाले दो बिंदु अब जुड़कर एक हो गए हैं और उनका आर्डर 2 है (यह सिंगुलैरिटी के आपस में मिलन का एक उदाहरण है)।

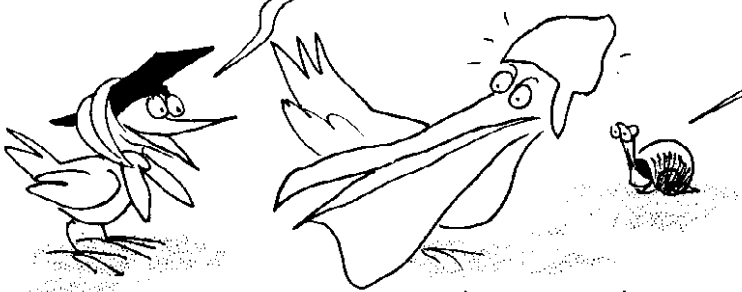


हाँ यह मजेदार है. क्या हम इस फील्ड को और आगे बढ़ाएं?

यह जोखिम भरा और खतरनाक हो सकता है.

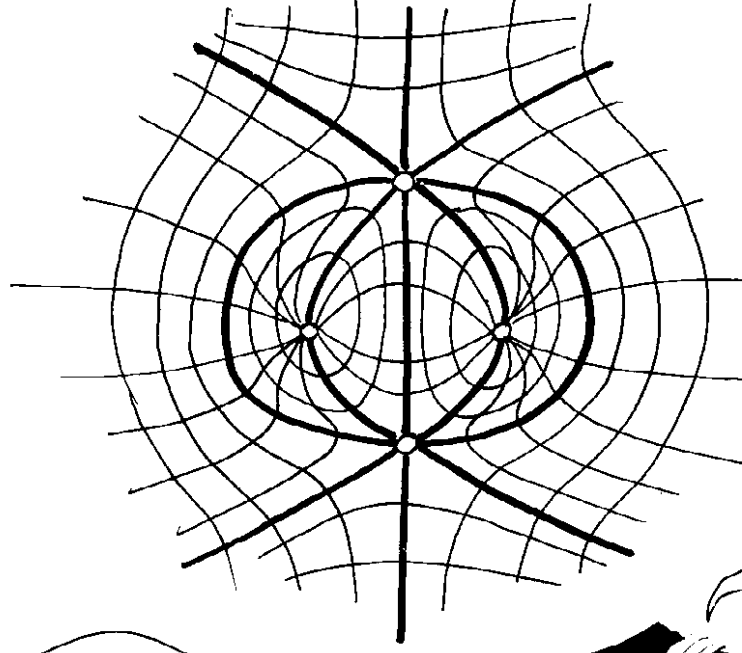
तुम्हें किस चीज़ का डर है लियोन?  
वहाँ हम स्पेस-टाइम में अपरिवर्तनीय  
बदल कर रहे हैं? मेरे दोस्त, वो अभी  
सिर्फ 100 गाँस है.

चुप्पी-अवरोध  
(साइलेंस-बैरियर) के बाद से  
उसका ध्यान पूरी तरह से  
चुंबकीय फ़ील्ड्स पर केंद्रित है.



उत्तम!

A



चुंबकीय फ़ील्ड B, कुंडली के केंद्र  
में पलट गई है. उसकी  
सिंगुलैरिटी दोगुनी हो गई है -  
और अब वो 1 आर्डर की दो  
सिंगुलैरिटी हो गई हैं. हमने  
टोरस की ज्यामिति से एक  
चुंबकीय वोरटेक्स बनाया है.

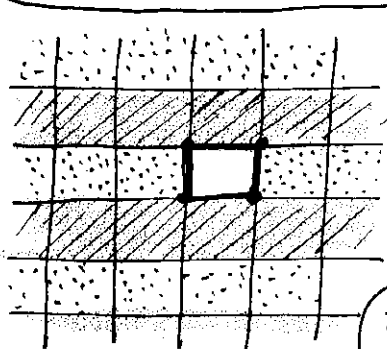


भौतिकी में सभी स्थानों पर  
आपको जाल और  
सिंगुलैरिटी मिलेंगी...



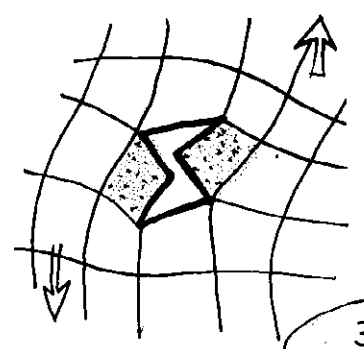
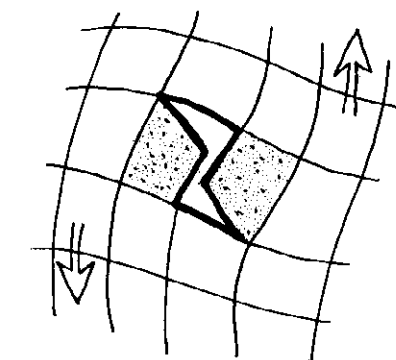
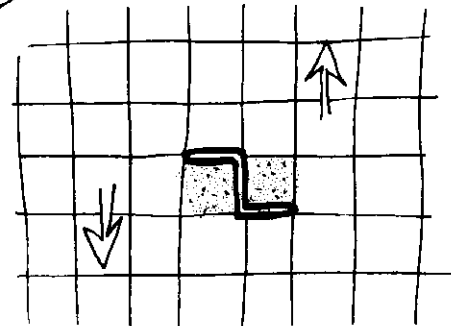
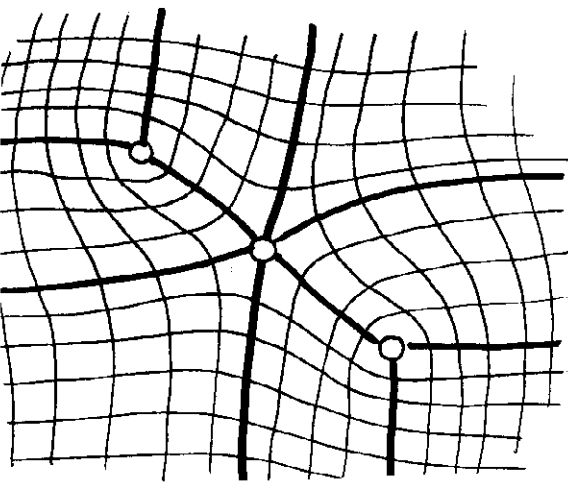
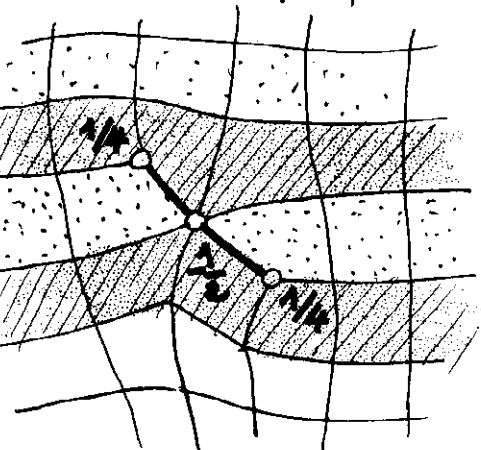
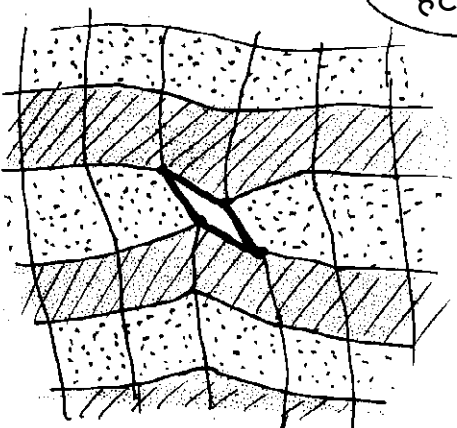


स्फटिक (CRYSTALS) तो सिंगुलैरिटी की खान हैं। इस स्फटिक के वर्ग जाल में हम एक तत्व को निकालकर एक दोष पैदा करते हैं। इससे एक छेद बनेगा जिसमें  $1/2$  की एक सिंगुलैरिटी और  $1/4$  की दो सिंगुलैरिटी होंगी।

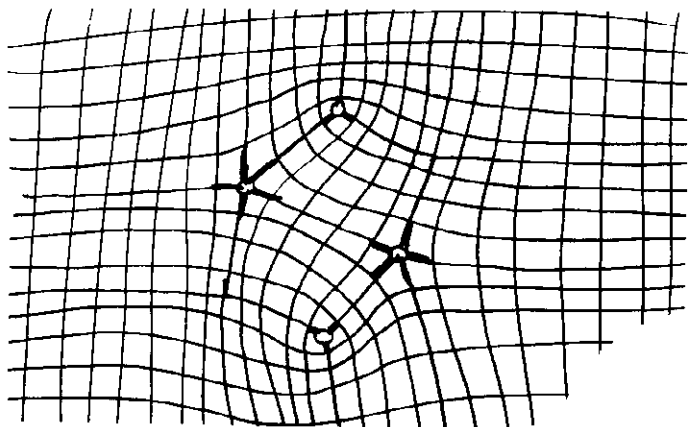
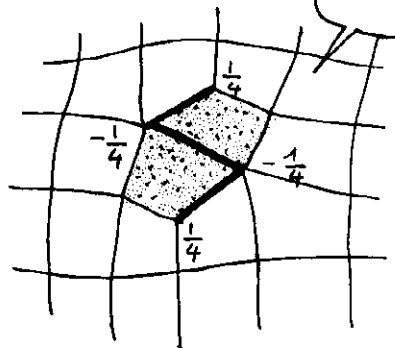
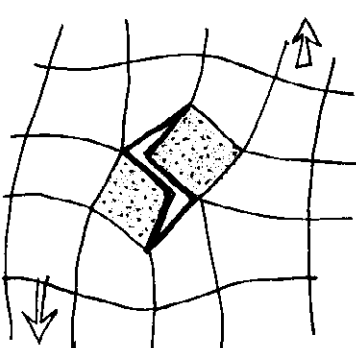


मैंने एक टाइल हटा दी है।

एक काटने वाली गति, ग्रिड की पुनर्व्यवस्था का कारण होगी, जिसके लिए  $1/4$  ऑर्डर की दो सिंगुलैरिटी और ऑर्डर -  $1/4$  की दो सिंगुलैरिटी चाहिए होंगी।



अरे!



इससे मुझे कुछ  
याद आया है.

मान लीजिए कि  
ब्रह्मांड एक प्रकार का ...

और वो क्या होगा  
टायर्सियस?

... एक क्रिस्टल?

क्या होगा अगर ब्रह्मांड बहुत सारे खांचों (स्लॉट्स) का बना हो? तब उसके  
एलीमेंटरी पार्टिकल्स, दोष या अव्यवस्थाएं हो सकती हैं, और सिंगुलैरिटी का  
संयोजन हो सकता है. वहां पर परस्पर क्रिया से पूरी तरह पुनर्व्यवस्था होगी. ...

यह वाकई में एक  
अच्छा विचार है!

ओह!

(\* मेश (MESH) दो-आयामों वाली वस्तुओं के लिए है.  
PAVING का मतलब बेहतर संख्या वाले आयामों से है.

इसके बाद की कहानी जीवंत कार्टून्स के आधार पर सुनाई जाएगी, जिन्हें A, B, C और D अक्षरों से दर्शाया जाएगा.

- प्रबंधन.

# A

एक मोबियस-स्ट्रिप का एक बाँय-सरफेस (सतह) में परिवर्तन।

## बाँय-सरफेस (सतह)

अभी तक हमने मज़ा किया है, लेकिन इस बीच बेचारा अमुंडसेन अभी भी परेशानी में फंसा है ...

और हमें अभी तक इस ग्रह के बारे में कुछ भी नहीं पता है जिसका कोई दक्षिणी ध्रुव ही नहीं है.

# B

ठीक इसी प्रकार - वक्र-किनार (CURVE-EDGE) और ऑटो-जोड़ों की टुकड़ी)

# C

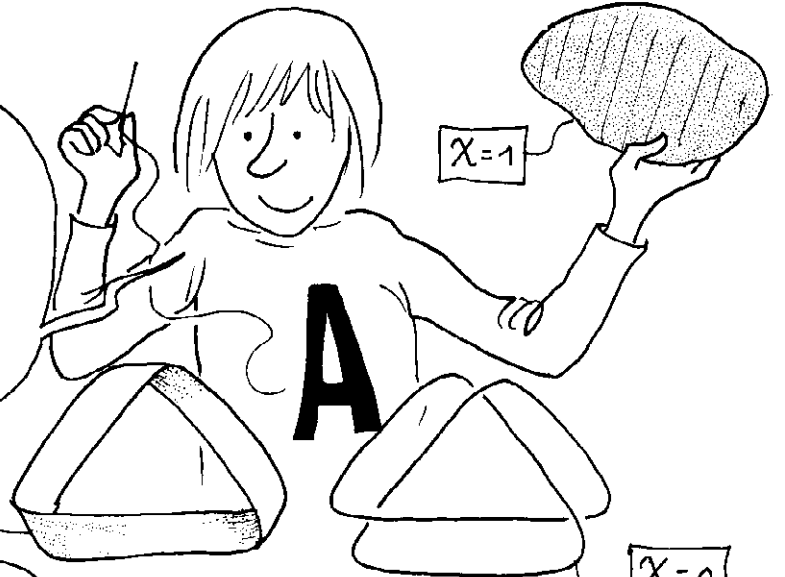
एंटी-पोडल बिंदुओं का संयोजन

# D

समय के पलटने का आभास होना

लेकिन प्रतीक्षा करें ... क्योंकि वहाँ केवल एक ही ध्रुव होगा, जिसकी औईलर-पोइनकेयर विशेषता 1 होनी चाहिए. पर यह सब एकतरफा लगता है ...

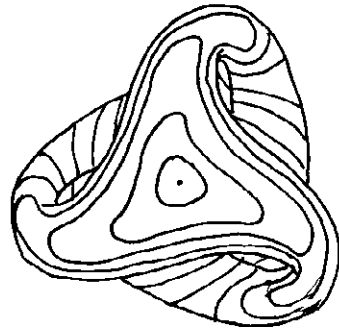
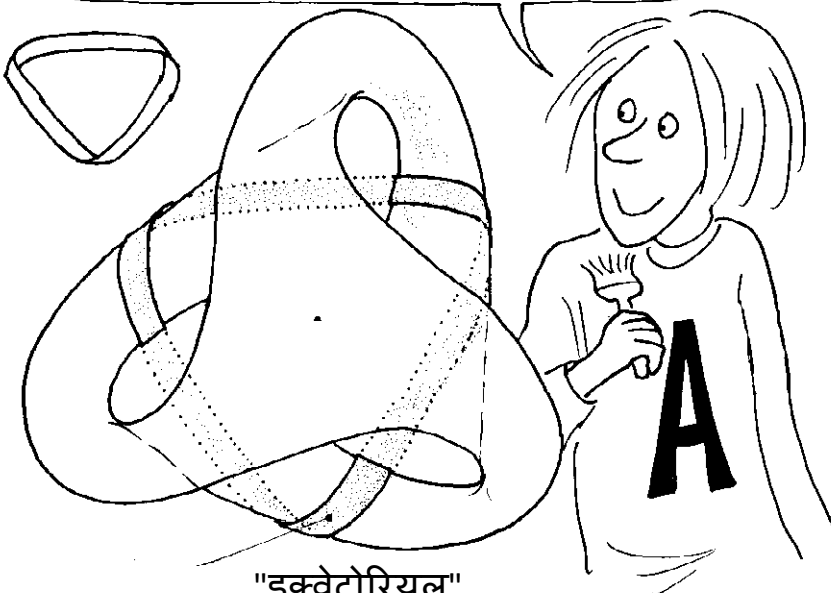
मोबियस-पट्टी की विशेषता शून्य होती है. मैं इसे एक बंद-वक्र के साथ सिल सकता हूँ, जिसमें एक "शून्य" विशेषता होगी, उदाहरण के लिए एक सरल डिस्क (चकती).....



इस संयोजन में एकात्मक विशेषता होगी और उसकी बंद एक-तरफा सतह होगी. लेकिन उसे सिलने की बजाय, हम कुछ ट्रांसवरसाइन का उपयोग क्यों न करें?



मोबियस-पट्टी को एक "बाँय" में मोड़ने के क्रम को, चित्र A और B में देखा जा सकता है. यह रही अंतिम वस्तु:

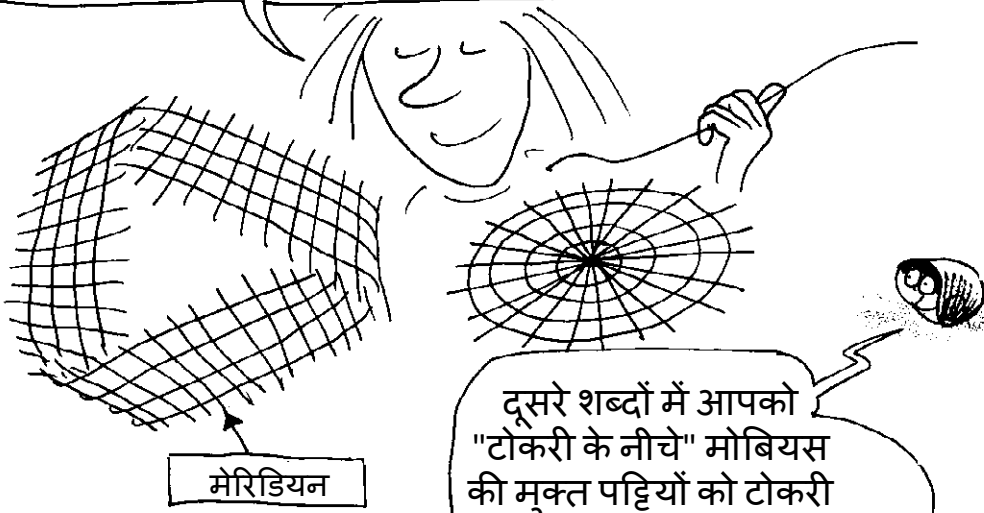


यहाँ पर बाँय-सरफेस की सामानांतर-रेखाएं हैं. यह मोबियस-पट्टी की किनार का विकास भी है जो A के अनुरूप है.

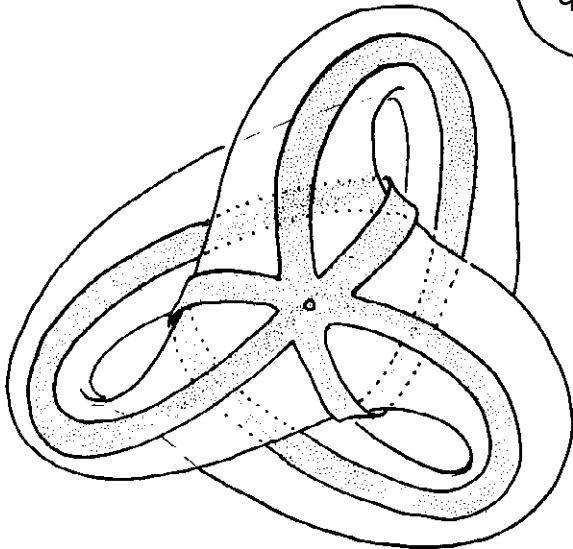
बड़ी अजीब समानताएं हैं!..

"इक्वेटोरियल" (भू-मध्यरेखा) पट्टी

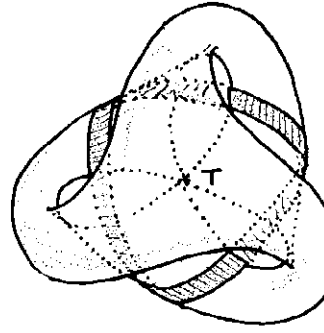
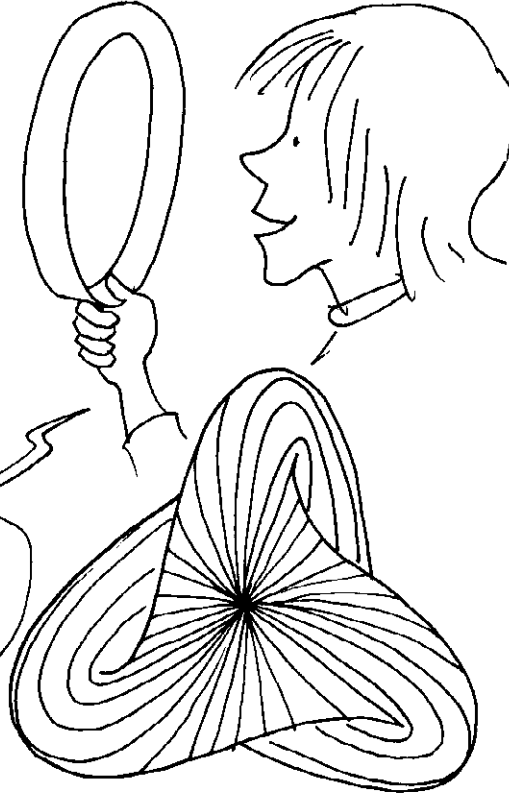
यह बुनाई का काम है, लियोन. हमें बस मोबियस-पट्टी की "मेरिडियन" (देशांतर-रेखाओं) को लम्बा करना होगा ताकि वे टोकरी, या पोल (ध्रुव) के नीचे आ सकें.



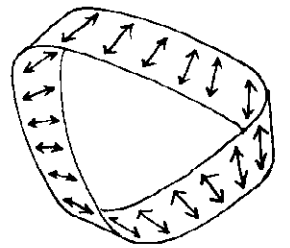
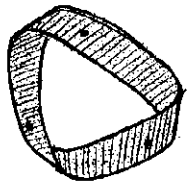
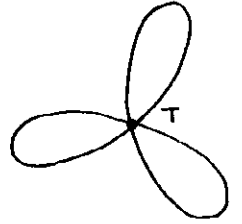
दूसरे शब्दों में आपको "टोकरी के नीचे" मोबियस की मुक्त पट्टियों को टोकरी के नीचे वाली पट्टियों के साथ बांधना होगा.



मेरिडियन के पड़ोसी, आधे मोड़ वाली मोबियस-स्ट्रिप्स होंगी.



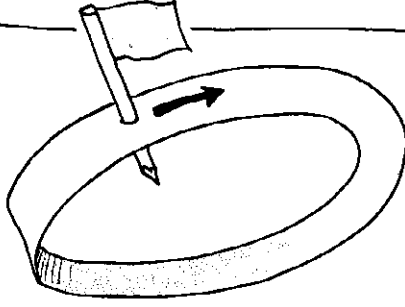
बाँय-सतह, शुरुवाती मोबियस-पट्टी के साथ



"मेरिडियन" और "सामानांतर-रेखाओं" वाले बाँय-सरफेस मॉडल की कल्पना सबसे पहले इस पुस्तक के लेखक ने की थी. बाद में मैक्स साउज नामक मूर्तिकार ने उसका एक ठोस मॉडल बनाया जिसे पैलेस ऑफ़ डिस्कवरी, पेरिस, फ्रांस के "पाई-रूम" में देखा जा सकता है.

- प्रबंधन

हम "नॉर्थ-पोल" (उत्तरी-ध्रुव) छोड़कर इनमें से एक पट्टी के साथ-साथ चले थे, "दक्षिण-ध्रुव" की तलाश करने.



और फिर निश्चित रूप से हम पेरी के झंडे पर वापस आए!



लेकिन अगर हम एक बॉय-सतह के साथ चले, तो फिर हमें ऑटो-जोड़ों वाले क्षेत्रों का पता कैसे नहीं लगा?

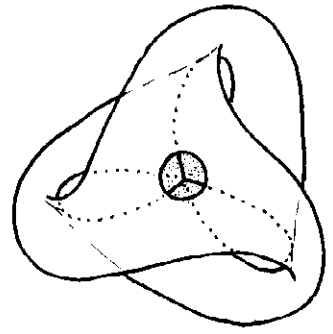
याद रखें, ऑटो-जोड़ों का यह चित्र केवल बॉय-सतह के विसर्जन का एक प्रभाव है, जो एक तीन-आयामी स्पेस में है. वास्तव में, बॉय-सतह और क्लाइन-बोतल दोनों भी दो-आयामी वस्तुएं हैं जिनका स्वतंत्र रूप से उस स्पेस में अस्तित्व होता है जिसमें वो दर्शाई जाती हैं.

यहां एक अच्छी विधि है ऑटो-जोड़ों के विचार को भूलने के लिए.

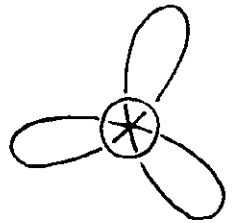
एक बात निश्चित है: यह ग्रह एक "बाँय-सतह" है और उसका केवल एक ही ध्रुव है.

ठीक है, मैं निश्चित रूप से बेचारे अमुंडसेन को यह बात नहीं बताऊंगा.

वो अभी भी गहरे सदमे में है.



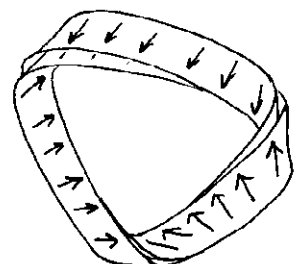
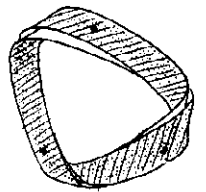
मोबियस-पट्टी एक गोल किनार के साथ.



## बाँय-क्यूब (घन)

मुझे यकीन नहीं होता ...

मैं आपको थोड़ा पागल लगूँ, लेकिन मुझे यह स्वीकार करना चाहिए कि विभिन्न चित्रों, क्रॉस-सेक्शन आदि के बावजूद मुझे अभी भी "बाँय-सतह" समझ में नहीं आई है....



क्या तुम्हें उसकी संरचना  
(टोपोलाजी) समझने में कुछ  
दिवकत आ रही है?

चलो ठीक है.  
वही होगा.....

ज़रा रुको लीओन!  
मुझे कुछ मिला है जो  
तुम्हारी मदद करेगा.

लीओन, देखो गेंद हो या घन हो,  
दोनों एक ही चीज़ें हैं. उनकी सामान  
टोपोलाजी, सामान औइलर-पोइन्केयर विशेषता  
और एक-सामान वक्रता होगी.

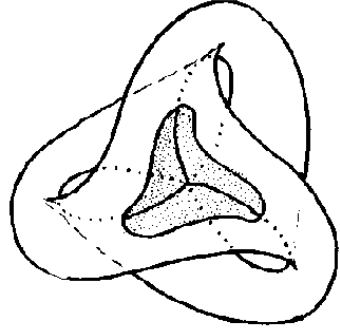
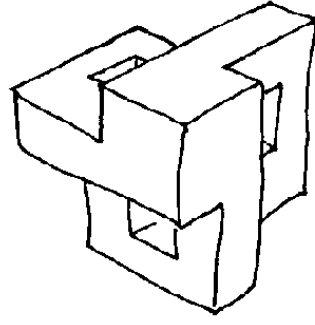
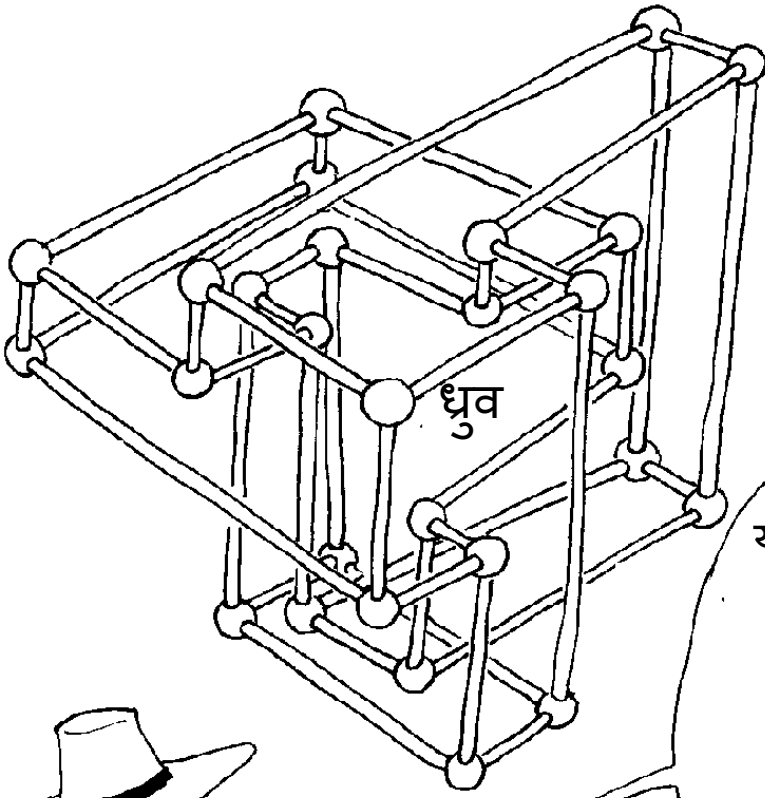
ठीक!

और वो एक टोरस होगा!

इसलिए वो एक  
क्लाइन-घन होगा!

चलो ठीक है!

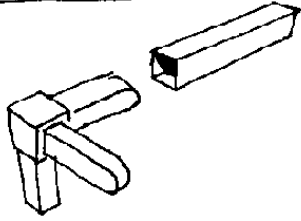
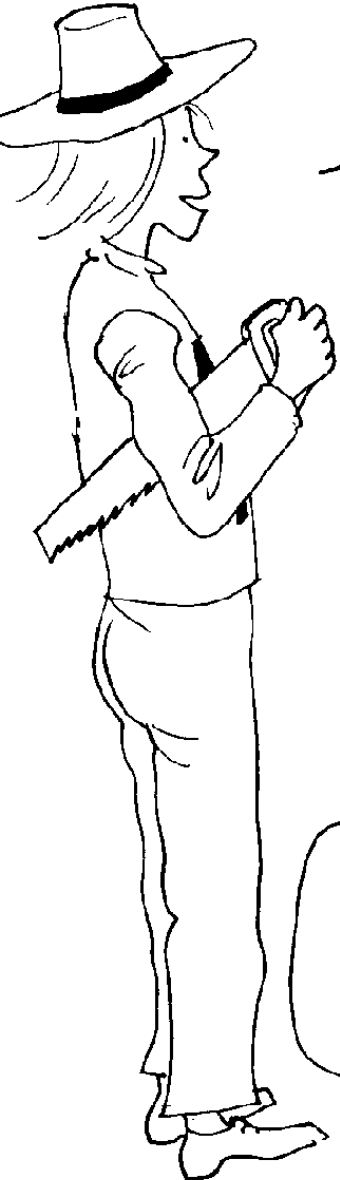




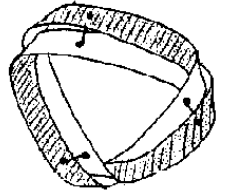
यह एक "बॉय-क्यूब" है  
जिसे आर्चीबाल्ड ने  
पेटेंट करवाया है.

28 शीर्ष  
43 किनारे  
16 सतहें

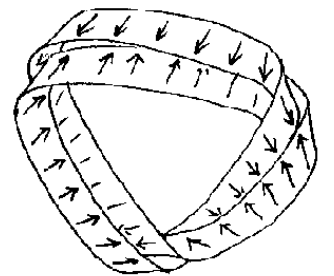
$$X = 28 - 43 + 16 = 1$$

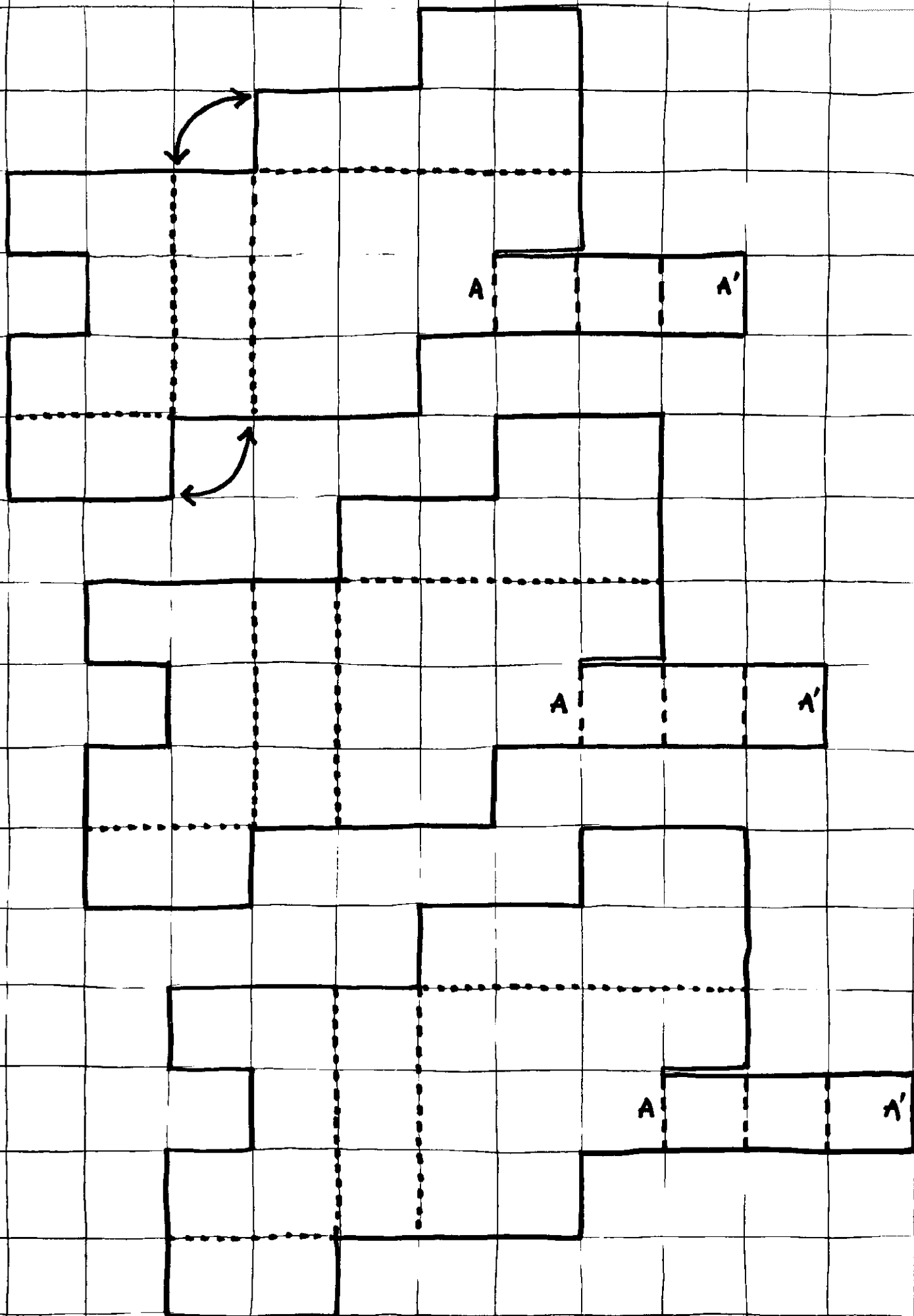


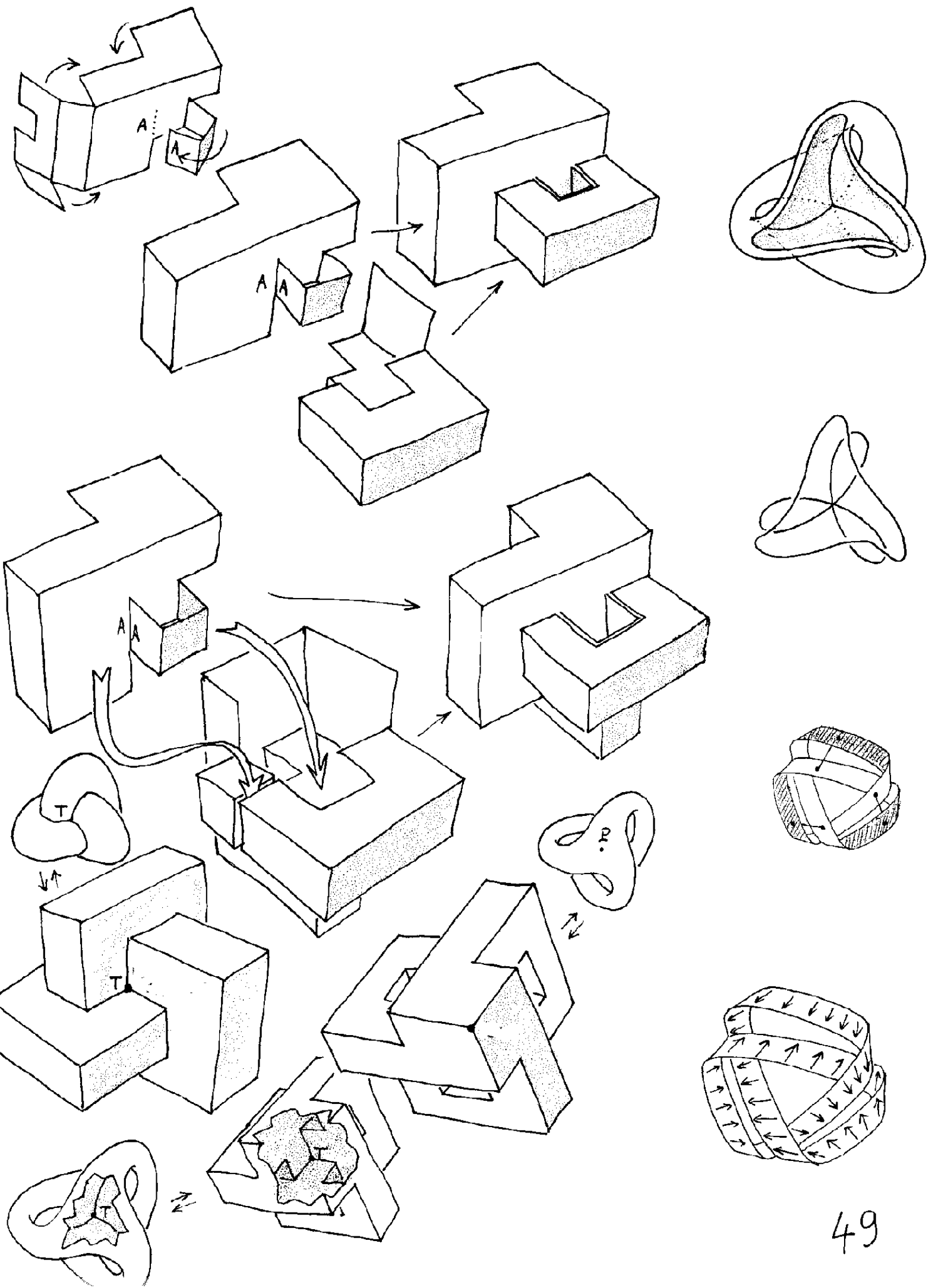
अच्छे मॉडल "रेनॉल्ड"  
शेल्फ (प्लास्टिक के  
चौकोर इयूरल ट्यूब और  
प्लास्टिक कोण के टुकड़ों)  
का उपयोग करके बनाए  
जा सकते हैं.



अगले पृष्ठ पर दिए  
कट-आउट्स का उपयोग  
करके आप खुद का  
"बॉय-क्यूब" बना सकते हैं.







# आवरण (COVERINGS)

फिर क्या यह  
कहानी का अंत है?

नहीं, इसमें एक  
अचानक आश्चर्य है.

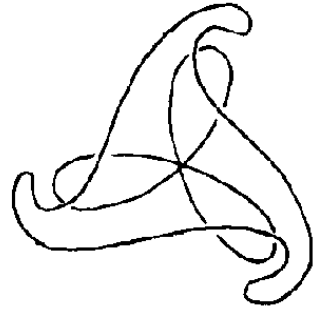
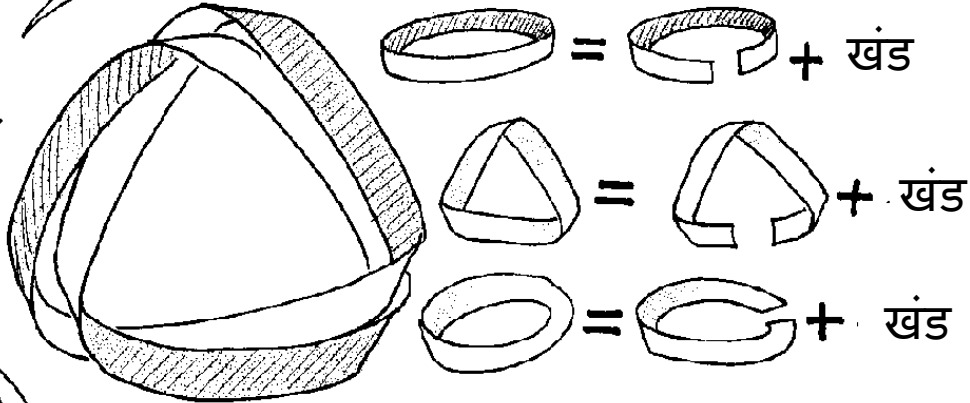
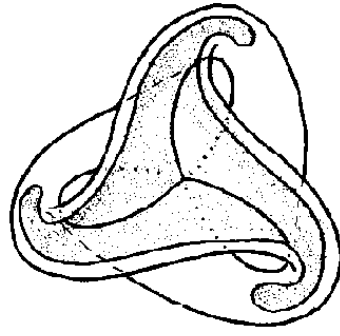
किसी यूनिलेटरल, नॉन-ओरिएंटेबिल  
वस्तु का दो पट्टियों वाला आवरण,  
द्विपक्षीय और ओरिएंटेबिल होगा  
और उसमें दोहरी विशेषता होगी.

यह सब क्या बकवास है?

असल में यह आसान है.  
एक मोबियस-पट्टी लें और उसकी  
अनूठी सतह को पेन्ट से कवर करें,  
फिर उसके बाद पट्टी को हटा दें ...

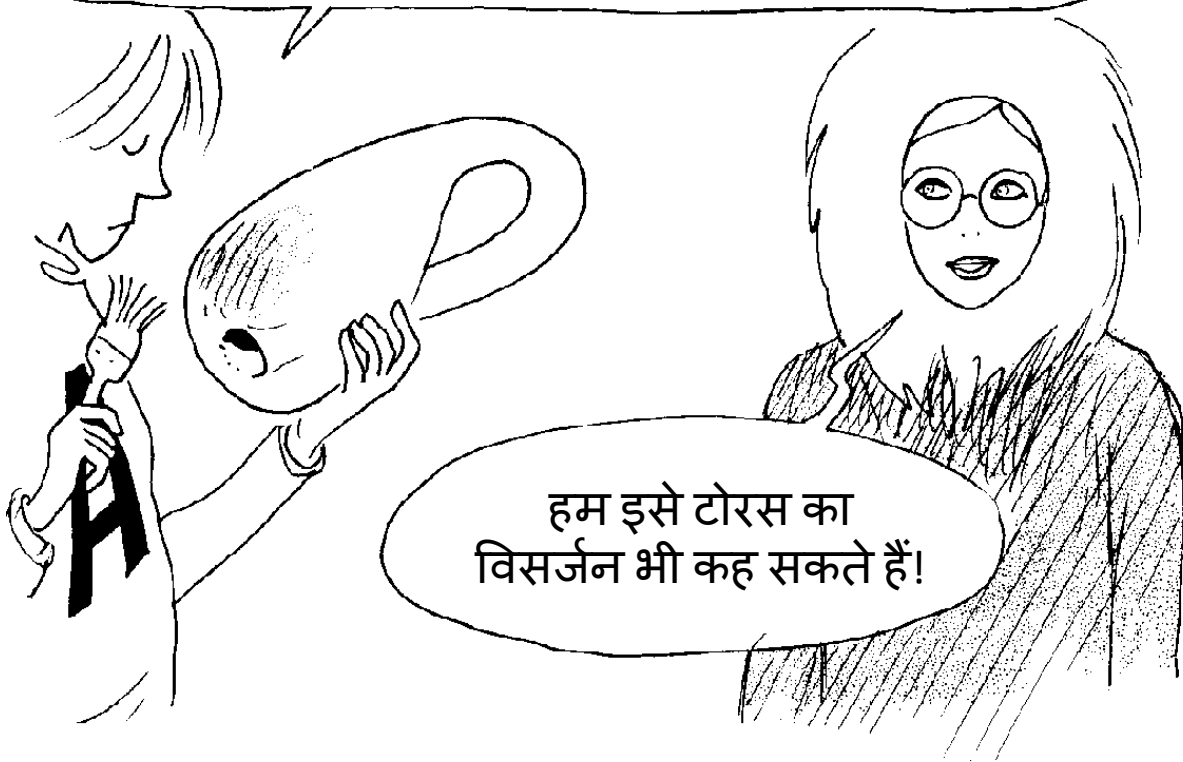
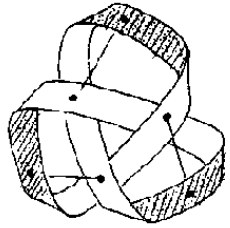
...फिर बस पेन्ट को ही रखें!

यह नई पट्टी, खुद पर बंद हुई और उसके दो चेहरे थे क्योंकि वो एक मोबियस-पट्टी के संपर्क में थी। आप चित्रों में उसके अनुक्रम देख सकते हैं।

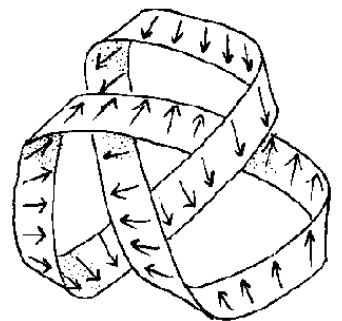


उसकी और मोबियस-पट्टी, दोनों की विशेषता "शून्य" होगी।

देखो, ... अगर मैं क्लाइन-बोतल को उसके एक अनूठे चेहरे पर काले रंग से पेंट करता हूँ, और फिर पेंट करने के बाद बोतल को हटा लेता हूँ जिससे सिर्फ पेन्ट बचे. तो फिर मुझे एक बंद (क्लोज्ड), नियमित सतह मिलेगी जिसकी औईलर-पाँइनकेयर विशेषता और  $2 \times 0 = 0$  (शून्य) होगी।



हम इसे टोरस का विसर्जन भी कह सकते हैं!



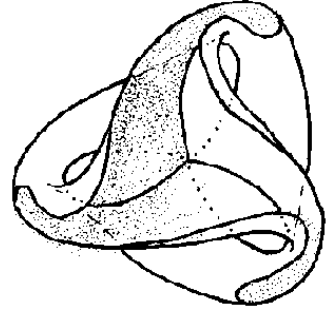
टायर्सियस,  
तुम कहाँ हो?

यहाँ!

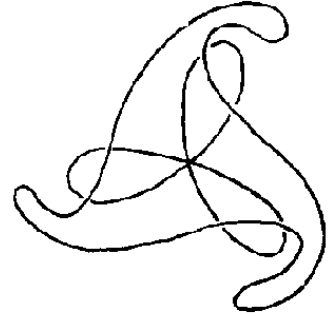
उसी तरह अगर मैं एक बाँय-सरफेस  
(सतह) लूँ और उसे पेंट से कवर करूँ और  
फिर बाँय को हटा दूँ, जिससे केवल पेन्ट  
बचे तो मुझे एक बंद (क्लोज्ड), नियमित  
सतह मिलेगी जिसकी औईलर-पोइन्केयर  
विशेषता  $2 \times 1 = 2$  होगी ...

... दूसरे शब्दों में, यह गेंद  
(स्फ़ीयर) के विसर्जन की  
बात होगी!

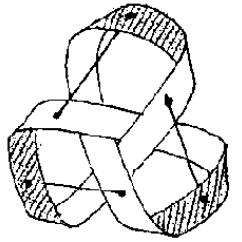
क्या मैं सच में इस अजीब गेंद (स्फीयर) को दुबारा "खोल" कर उसे एक "साधारण" गेंद (स्फीयर) में बदल सकता हूँ?



ट्रांसवरसाइन के साथ भी आप ऐसा कर पाएंगे. कोई समस्या नहीं होगी. टोरस के लिए भी वही करना होगा.

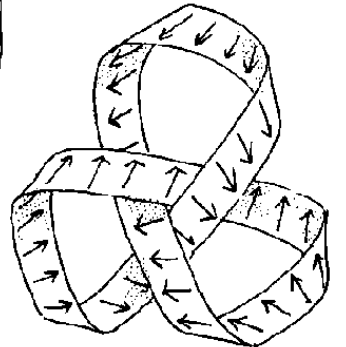


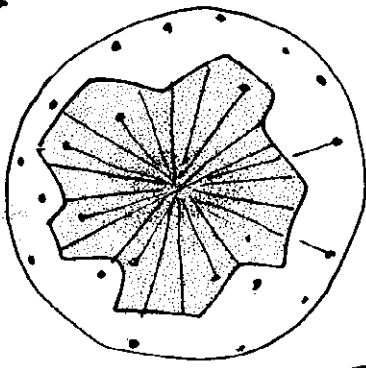
चलो अब विपरीत दिशा में चलें ... मान लें कि मैं बिना किसी मोड़ के गेंद (स्फीयर) को "रीफोल्ड" करना चाहूँ!



क्रॉस-स्ट्रिप्स के परिणाम

आपको कुछ श्रिन्कासोल (SHRINKASOL) की ज़रूरत पड़ेगी.





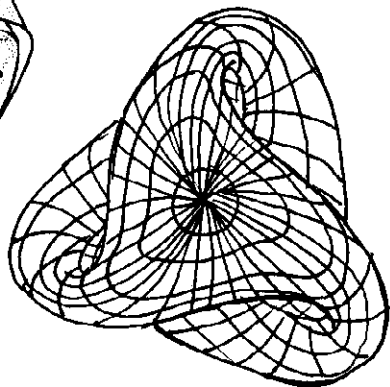
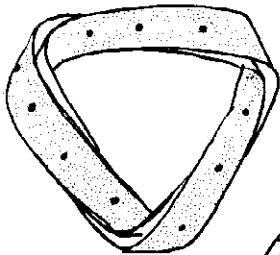
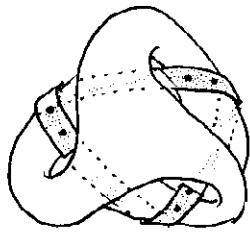
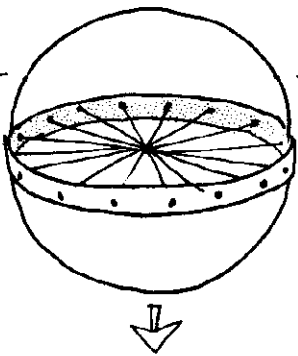
हम गेंद (स्फीयर) के हर बिंदु को उसके एंटीपोड से जोड़ेंगे श्रीन्कासोल (SHRINKASOL) में भिगोए गए धागों से.



ये धागे इतने सिकुड़ जायेंगे कि उनकी लंबाई शून्य हो जाएगी, जबकि गोले की सतह स्थिर रहेगी. हम प्रत्येक बिंदु को उसके एंटीपोड के साथ जोड़ेंगे.

लेकिन आप देखेंगे कि एक अन्य चित्र-पुस्तक गेंद (स्फीयर) को अंदर-बाहर मोड़ने के लिए समर्पित है. इस बीच, 'फिल्म-स्ट्रिप' G में छवियों की श्रृंखला दिखाती है कि कैसे गेंद की भू-मध्यरेखा खुद अपने आप पर मुड़कर बाय की भू-मध्यरेखा बन जाती है. फिर उत्तरी-ध्रुव जाहिर है, दक्षिण-ध्रुव के बगल में ही चिपका होगा.

-प्रबंधन

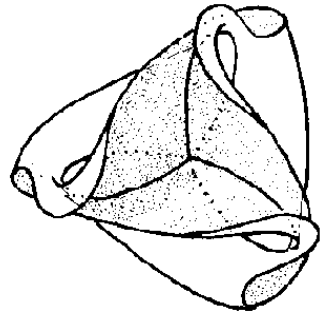


गेंद (स्फीयर) की सभी दिशांतर और सामानांतर रेखाएं एक-दूसरे को कवर करती हैं.



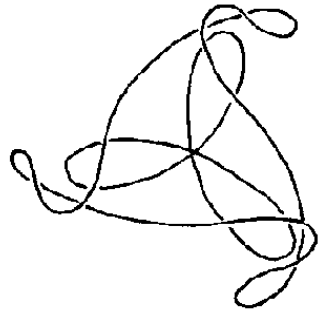
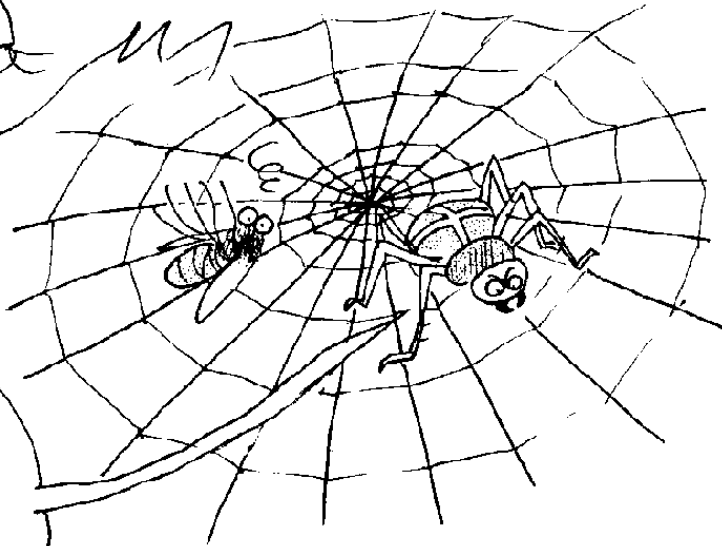


कल्पना करें एक मकड़ी की, जो बाँय की दिशांतर और सामानांतर रेखाओं वाली सतह पर रहती हो. उसे ऐसा लगेगा जैसे वो किसी गेंद (स्फीयर) पर रह रही हो!

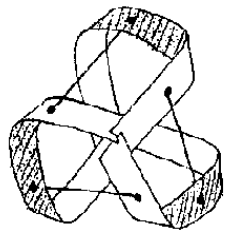
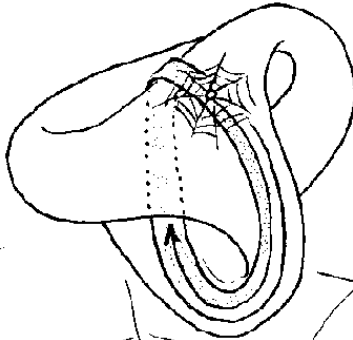


तीन "टिमपानी"  
का बंद स्वरुप

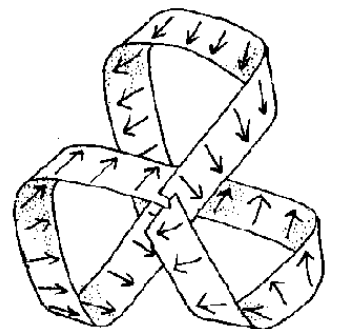
ठीक है, अब मैं रात  
का खाना खा चुका हूँ,  
इसलिए अब मैं  
टहलने जा रहा हूँ.



मकड़ी  
का मार्ग



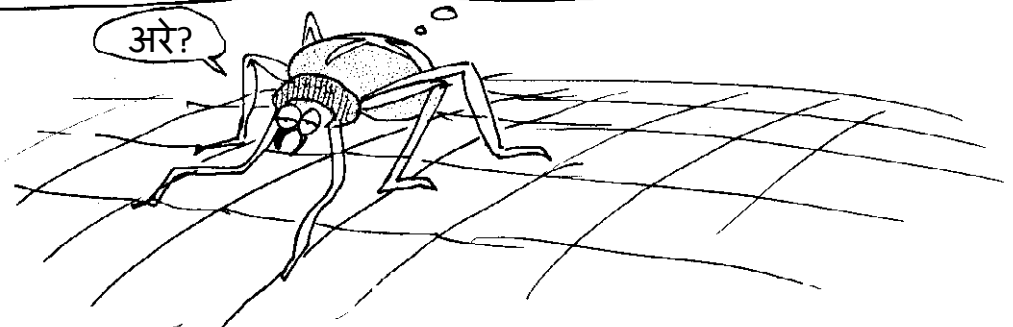
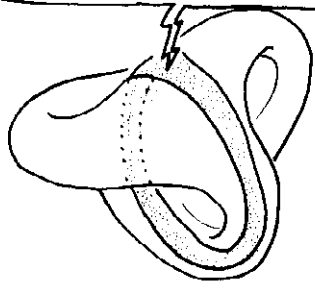
ओह, एक और जाल.  
एक सहयोगी जो दूसरी तरफ  
रहता है उसने भी एक मकखी  
पकड़ी है. यह बहुत अच्छा है!



चलो कोई नहीं देख रहा है,  
अब मैं इस मकखी को खाऊंगा!

चलो घर चलते हैं.

अरे?



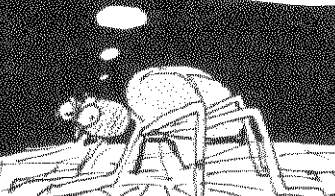
ओह! जब मैं घमने गया था  
तो दूसरी मकड़ी यहाँ आकर  
मैरी मकखी खा गई!

हा! हा! हा!



पर वास्तव में वहाँ केवल एक  
मकखी और एक ही मकड़ी थी.

मैं पूरी रात प्रतीक्षा करूंगा पर तुम्हें पकड़ूंगा  
जरूर. फिर पकड़कर तुम्हें मज़ा चखाऊंगा...



लेकिन मकड़ी की कहानी ... वो मुझे कुछ सोचने को मजबूर करती है. हमें अमंडसेन की समस्या का हल मिल गया है.

मिस्टर अमंडसेन, अब हमें आपकी समस्या का हल मिल गया है. हमने आपका दक्षिण-ध्रुव ढूँढ लिया है.

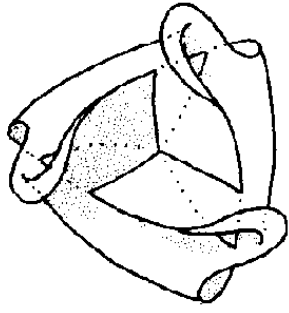
वो कैसे?

आह ...

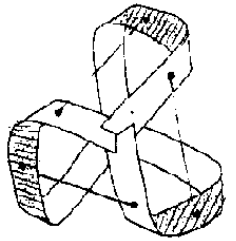
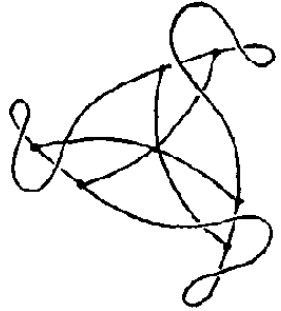
आप जाएँ पर यह अपने साथ लेते जाएँ.

उन्होंने पेरी को भी यही चीज़ दी थी.

... और आप बस इसे नीचे धसाएं.

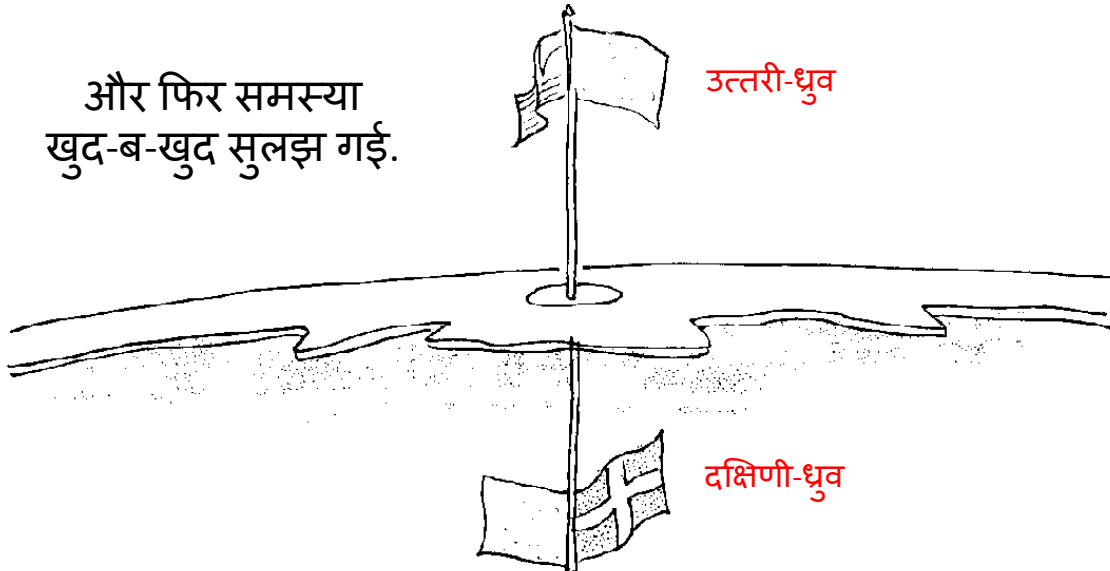


"कानों" का निकलना

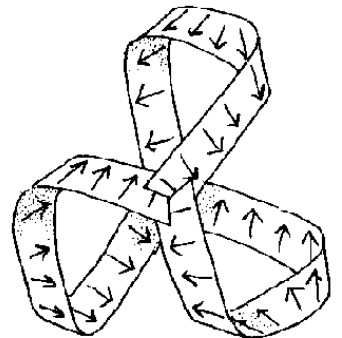


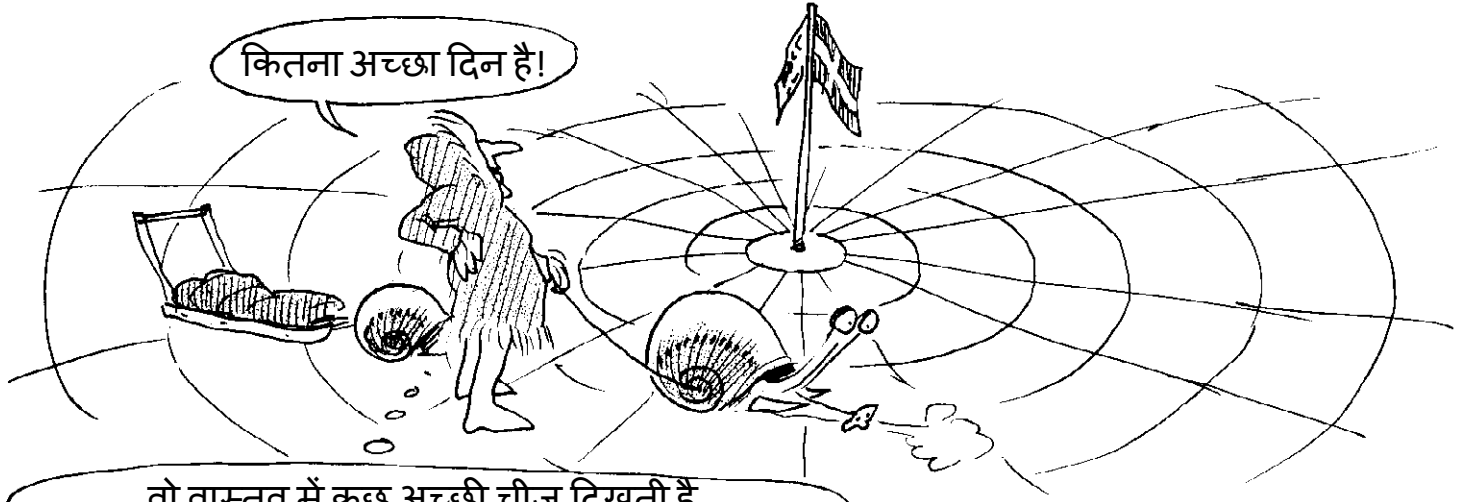
और फिर समस्या खुद-ब-खुद सुलझ गई.

उत्तरी-ध्रुव



दक्षिणी-ध्रुव





वो वास्तव में कुछ अच्छी चीज़ दिखती है.



महाशय  
अमुंडसेन, कृपया  
एक ऐतिहासिक  
तस्वीर ....



नहीं! इस ऐतिहासिक तस्वीर में  
मैं अकेले ही होना चाहता हूँ.

दक्षिणी  
ध्रुव

अन्य विषयों की तरह ही है, विज्ञान में कभी-कभी आपको बहुत गहराई तक  
खुदाई नहीं करनी चाहिए ...

... प्रत्येक पोल (ध्रुव) की अपनी-अपनी जगह है  
और दरवाजे अच्छी तरह से बंद हैं.

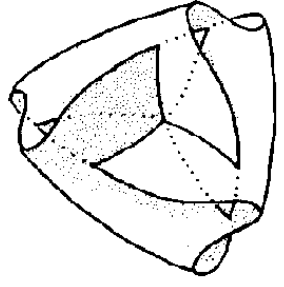
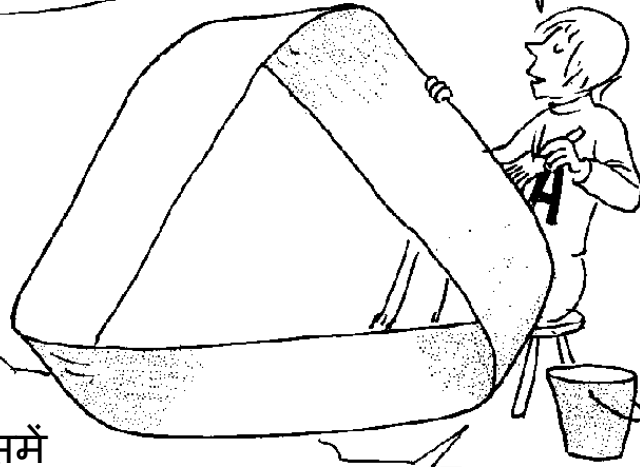


इतना ही नहीं बल्कि अगर  
हम उत्तरी-ध्रुव के नीचे  
खोदते हैं तो शायद हमें  
कुछ बुरा आश्चर्य मिले.

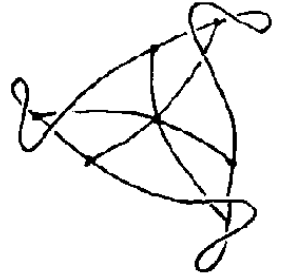


और हो सकता है कि यहां उपस्थित कोई  
व्यक्ति उससे बहुत परेशान हो.

ठीक है, यह काम तो हो गया.  
भला आर्ची क्या कर रहा है?

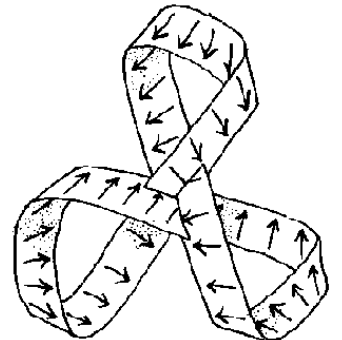
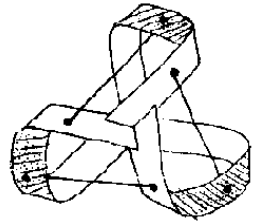
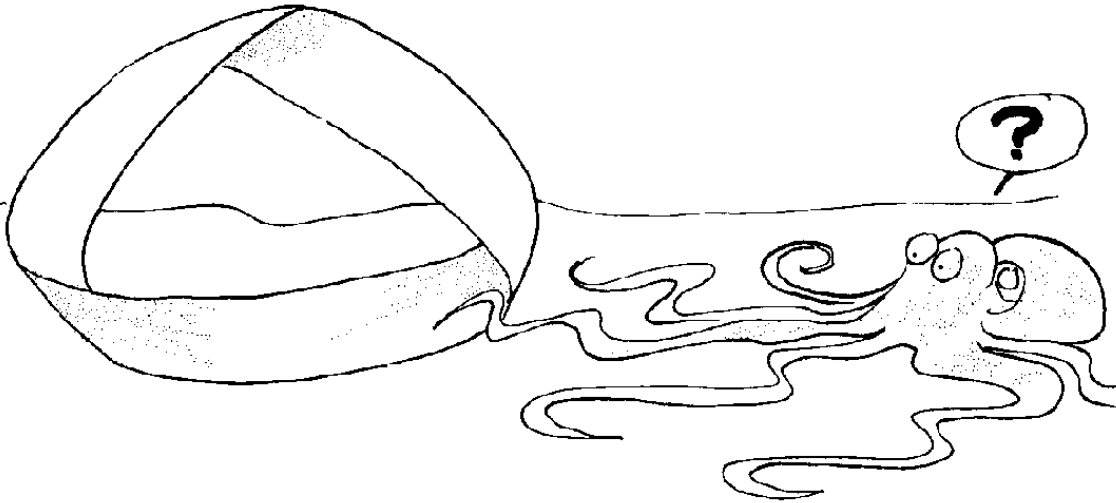


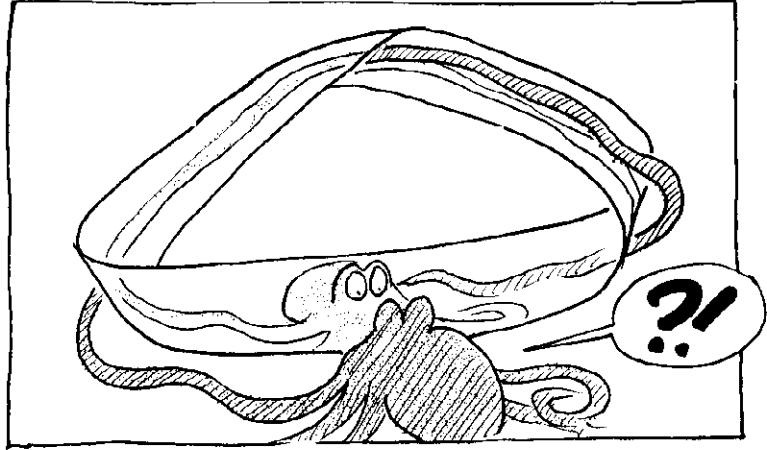
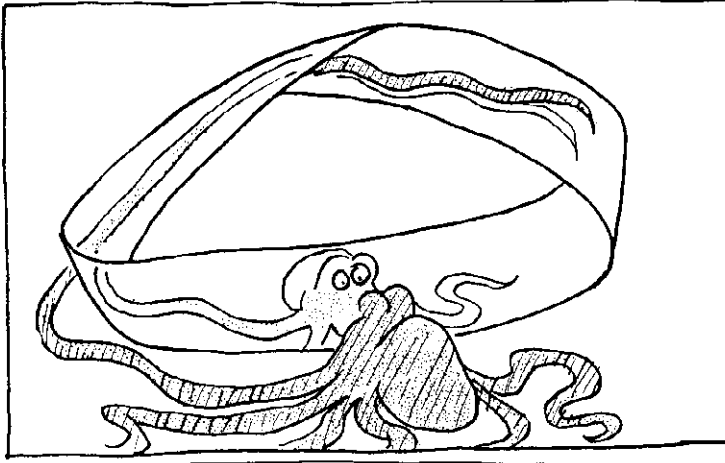
दो-तरफा दर्पण क्या होता है,  
क्या आप जानते हैं? आप इसमें  
एक प्रतिबिंब देख सकते हैं और साथ-साथ उसके अंदर से  
भी देख सकते हैं. खैर मैं एक मोबियस-पट्टी को दो-तरफा  
दर्पण में बदल रहा हूँ.



## दर्पण की स्टेज (चरण)

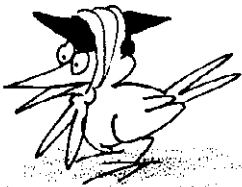
एक स्क्विड (विद्रूप) को पकड़ना.



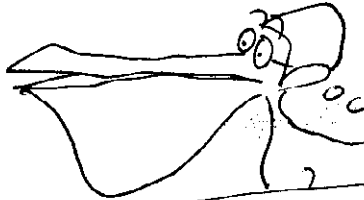


क्या हो रहा है!?! लगता है स्क्विड एकदम सुन्न हो गई है.

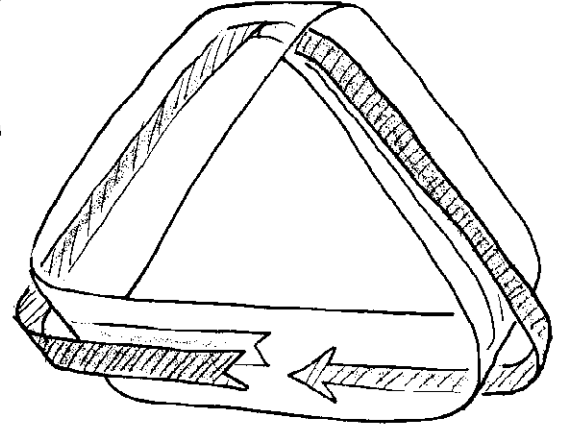
स्क्विड कुछ भी महसूस नहीं कर रही है क्योंकि उसका असली हाथ उसके सिर की परछाईं को खरोंच रहा है जबकि उसकी परछाईं वाला हाथ उसके असली सिर को खरोंच रहा है.



वो बहुत ज़ोर से अपने सिर को खरोंच रही है.



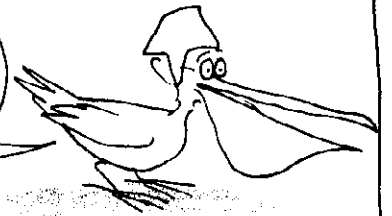
अरे बाप रे!



क्योंकि दर्पण एक-तरफा है इसलिए उसका चक्कर काटने से उसका हाथ दूसरी तरफ चला गया.

और क्योंकि दर्पण पूरी तरह से अर्ध-पारदर्शी है, इसलिए वो ठीक काम नहीं कर रहा है!!!

बड़ा अजीब सा लग रहा है!



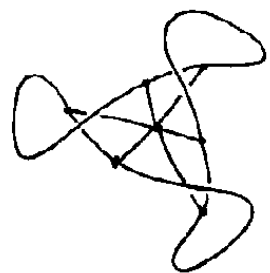
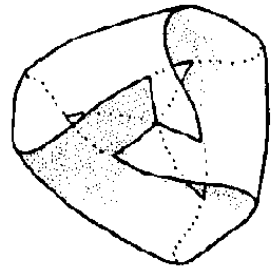
उसकी जगह खुदको रखो!



देखो, यदि एक दिन तुम दर्पण के सामने खड़े होकर अपना कान खरोंचते हो और कुछ भी महसूस नहीं करते हो, तो इसका मतलब है कि दर्पण एक-तरफा है (\*)

कहीं वो खतरनाक तो नहीं होगा? मुझे नहीं पता.....  
इस प्रकार के तार्किक-विरोधाभास से कहीं ब्रह्मांड  
ही न गायब हो जाये (\*)

हम दो-आयामी मॉडल का उपयोग करके  
स्पेस-टाइम की टोपोलॉजी का अध्ययन  
कर सकते हैं, एक आयाम स्पेस के लिए  
और दूसरा समय के लिए. उससे एक जाल  
या ग्रिड का निर्माण होगा.

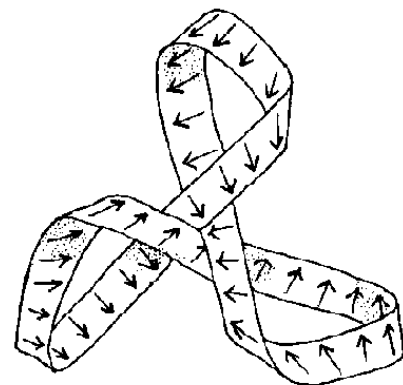


## पागल हुआ स्पेस-टाइम

हम स्पेस-टाइम की टोपोलॉजी का अध्ययन दो-आयामी  
मॉडल्स से कर सकते हैं. इसमें एक स्पेस और दूसरा  
आयाम समय के लिए होगा.

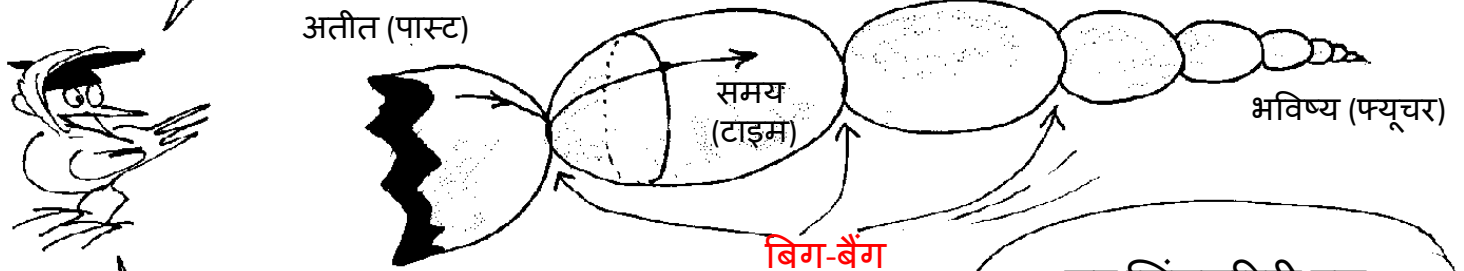
उससे ग्रिड या  
जाली बनेगी.

"ट्रिपल" बिंदु



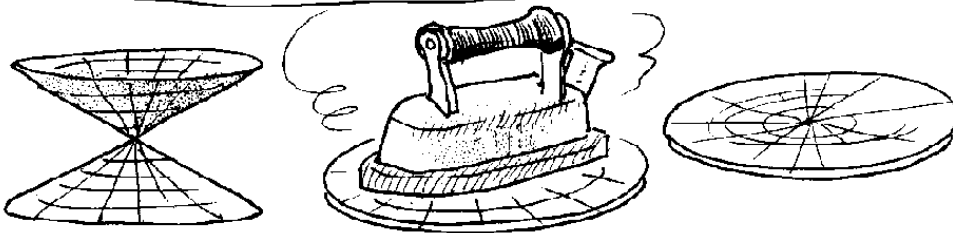
(\*) किसी ने भी ऐसा पहले कभी करके नहीं देखा है.

हमने बिग-बैंग के सिद्धांत में देखा कि फ्रीडमैन के साइकिलिक ब्रह्माण्ड के मॉडल को, साँसेज की एक अनंत लड़ी की छवि द्वारा दर्शाया जा सकता है, जिसमें प्रत्येक बंधा बिंदु एक नया बिग-बैंग होगा.

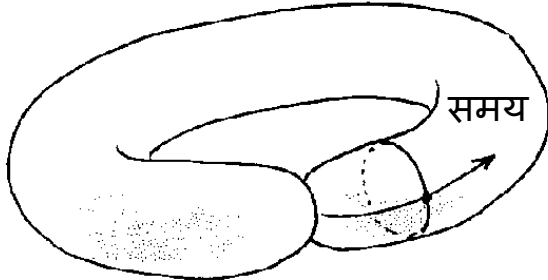


प्रत्येक बिग-बैंग एक ध्रुवीय प्रकार की सिंगुलरिटी होगी.

यह सिंगुलरिटी इस प्रकार कैसे जुड़ी हैं?



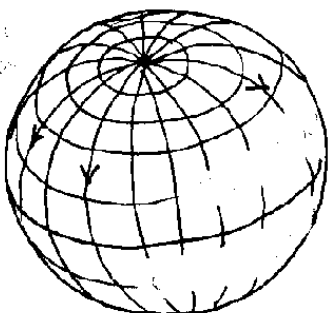
एक शंकु लें और उसे चपटा करें.



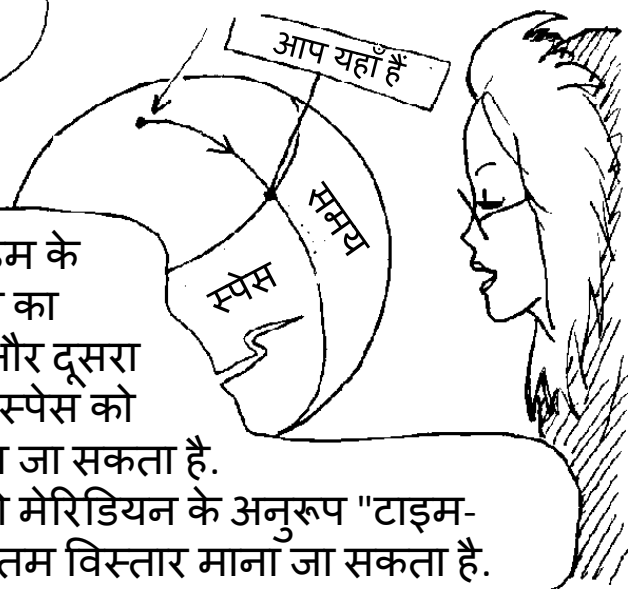
हम यह भी कल्पना कर सकते हैं कि ये घटनाएँ खुद को असीमित बार दोहरा सकती हैं. उस स्थिति में हम ऐसा करेंगे ...

या हम यह मान सकते हैं कि समय (टाइम) असल में एक सरल शुरुआत और अंत है इस तरह...

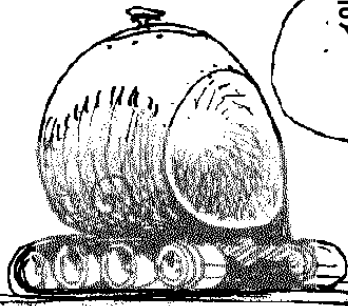
बिग-बैंग



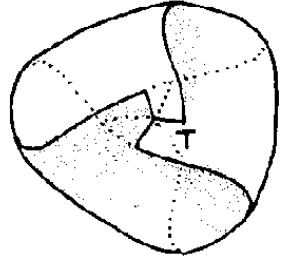
स्फेरिकल स्पेस-टाइम के इस क्लासिक मॉडल का एक पोल बिग-बैंग और दूसरा एंटी बिग-बैंग होगा. स्पेस को समानांतर वक्र माना जा सकता है. और भूमध्य-रेखा को मेरिडियन के अनुरूप "टाइम-लाइन्स" का अधिकतम विस्तार माना जा सकता है.





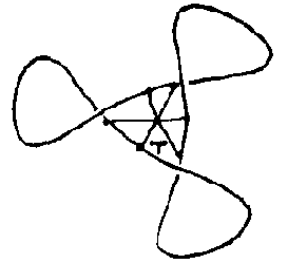
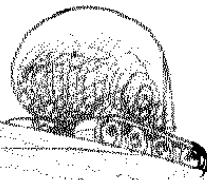


इन मेरिडियन - या यूनिवर्स-रेखाओं के साथ-साथ यात्रा करने के लिए, क्रोनोस्कोप से बेहतर कुछ नहीं है.



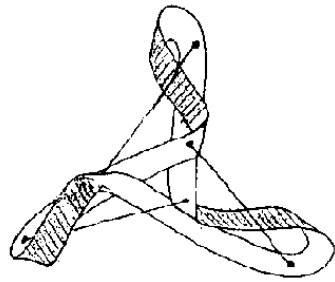
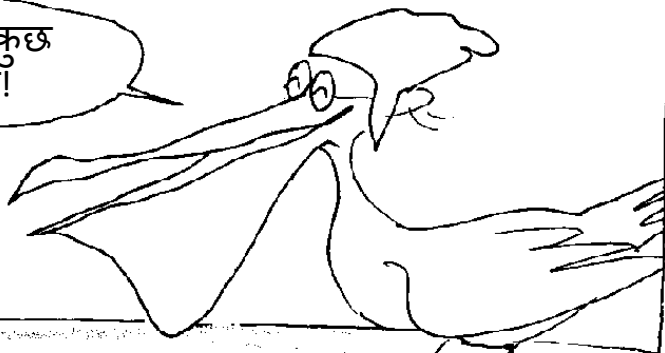
"ट्रिपल" बिंदु का निर्माण

क्या हम इन मशीनों में से एक को उधार ले सकते हैं? मुझे स्पेस-टाइम की खोज करना अच्छा लगेगा.

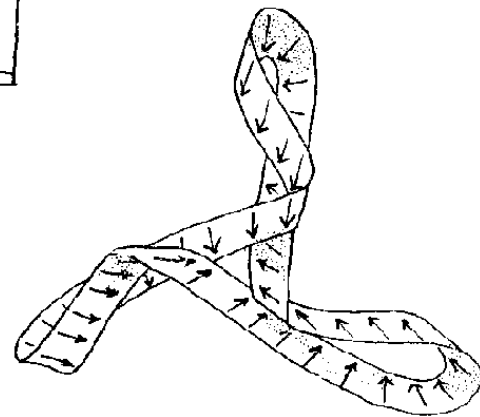
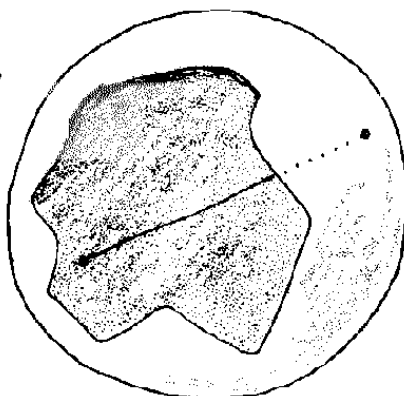


लियोन और टायर्सियस कहां हैं?

मैंने और टायर्सियस ने कुछ मजेदार काम किये हैं!



हमने स्पेस-टाइम के सभी बिंदुओं को लिया और उन्हें एक डोरी से एंटी-पोडल (ANTIPODALS) के साथ जोड़ दिया ...



फिर हमने डोरी को श्रिंकासोल (SHRINKASOL) में भिगोया. टायर्सियस को लगा कि वो एक दिलचस्प प्रयोग होगा.

तुम दोनों बिलकुल पागल हो. तुम्हें उसके नतीजों का कोई अंदाज़ नहीं है!!!!

क्यों, क्या होगा?

टायर्सियस ने जो भी किया, उससे अब स्पेस-टाइम खुद अपने आप ढह रहा है. इसके विस्तार चरण के अनुरूप सभी घटनाएं बिग-बैंग से लेकर अधिकतम-खिंचाव तक, सभी एंटी-पोडल क्षेत्रों के कारण खुद को सिकुड़न-चरण की संबंधित घटनाओं के संयोजन में पाएंगे.

आपका मतलब है कि बिग-बैंग और एंटी बिग-बैंग एक साथ आपस में मिल जायेंगे?

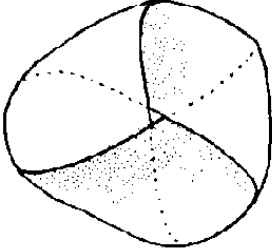
यह एक बड़ा अजीब पर एक वास्तविक संयोग होगा.

मुझे लगता है कि किसी ने पहले ही इसके बारे में सोचा होगा? (\*)

मुझे टायर्सियस की बात कभी नहीं सुननी चाहिए थी.

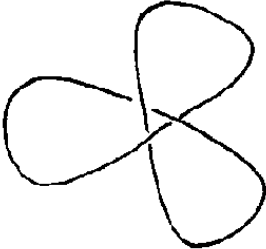


संयोजन की इस घटना से स्पेस-टाइम क्षेत्र और उसके एंटीपोड्स के साथ आमने-सामने आएंगे और वो एक अस्थायी विपक्ष में होंगे.

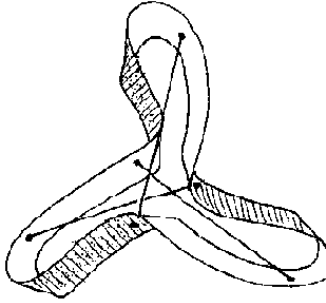
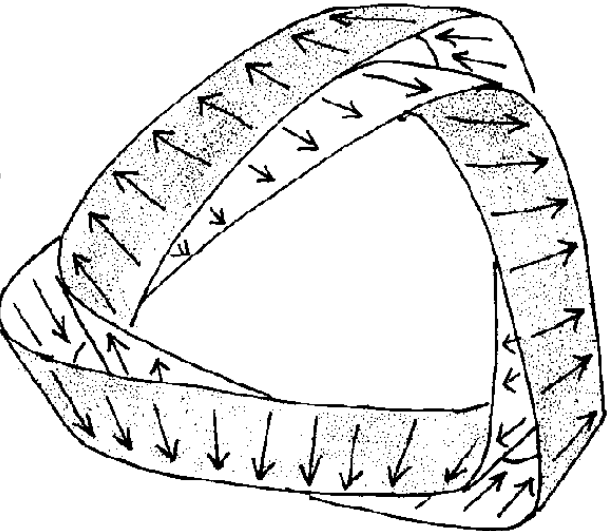
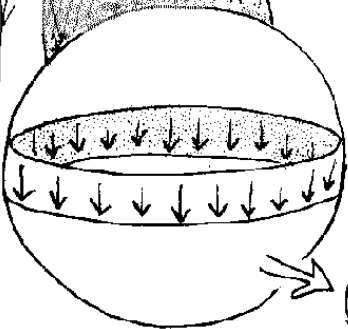


असंभव!

हर्गिज नहीं. उदाहरण के लिए भूमध्य-रेखा के पास के गोलीय क्षेत्र को लें, जो अधिकतम-विस्तार की स्थिति से मेल खाता है. हम स्पष्ट रूप से देख सकते हैं कि वो खुद अपने आप पर कैसे मुड़ता है - जैसे फिल्म स्ट्रिप D में.



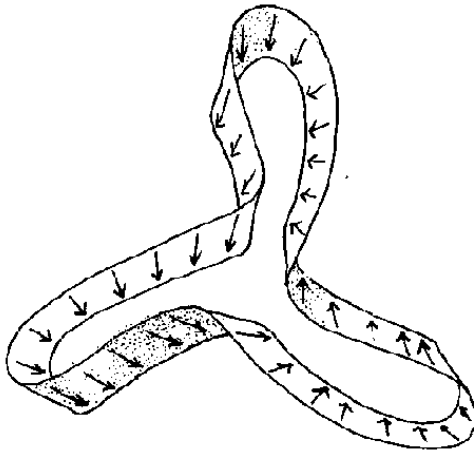
तब समय के तीर विपक्ष में होते हैं.



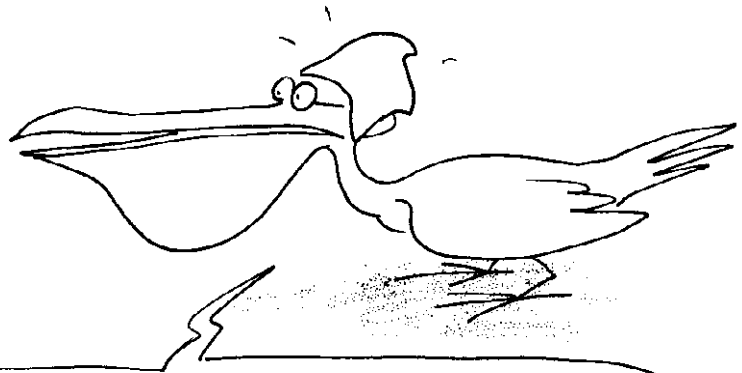
आपका मतलब है कि कुछ लोगों के लिए जो अतीत होगा, वो एंटी-पोडिअन्स के लिए भविष्य होगा?



शायद!

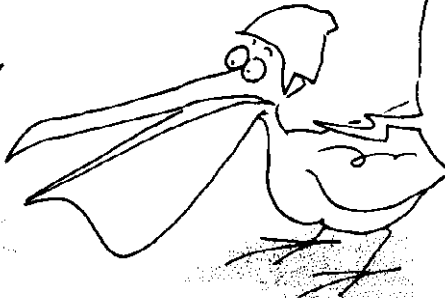
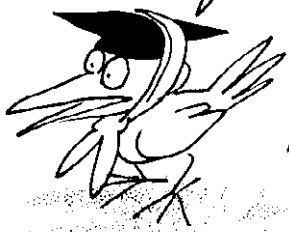


बहुत अच्छा किया लियोन!  
बेहतरीन काम!



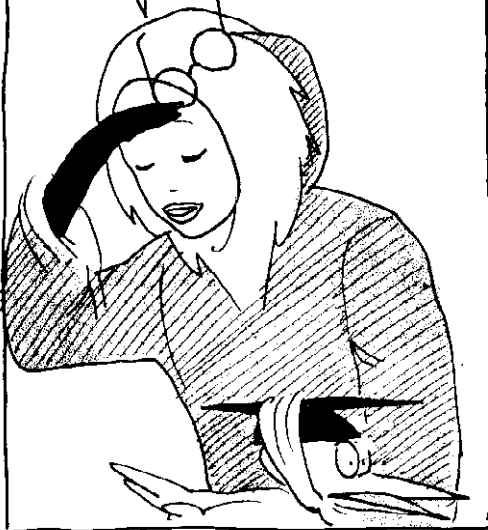
आपका मतलब है कि इससे शायद ब्रहमांड एक  
असमर्थित विरोधाभास की स्थिति में डूब जाएगा?

हाँ, एक प्रकार का  
तार्किक, मृत अंत.

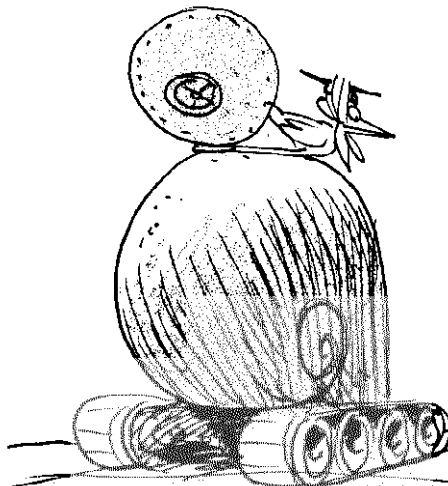


जब श्रिंकासोल (SHRINKASOL) अपना  
प्रभाव डालेगा, तो ब्रहमांड खुद अपने  
आप पर टेलीस्कोप करेगा और हम  
समय को बहुत तेजी से पीछे की ओर  
जाते हुए पाएंगे.

वैसे, टायर्सियस  
कहां है?



चलो क्रोनोसस्केप में जाएं.  
वहां हम उसे बुलाने की कोशिश करेंगे.



सभी घोंघों  
जल्दी आओ?

टायर्सियस, क्या तुम मुझे सुन सकते हो?

लेकिन ज़रा रुकिए, अगर टायर्सियस हमारे लिए समय उल्टा (रेट्रोक्रोनिक) हो गया है और अगर हम उससे संपर्क कर पाते हैं, तो हम क्या कहने जा रहे हैं यह उसे पहले ही पता चल जाएगा.

इससे भी बदतर होगा अगर वो अपने सही समय में, इस संदेश को प्रसारित कर रहा होगा!!

अरे! बाप रे!

वैसे, अगर हम उससे मिलते हैं तो वो और भी बुरा होगा!

रिचर्ड फ़ाईनमैन के अनुसार एंटी-मैटर, उलटे समय में रहता है!

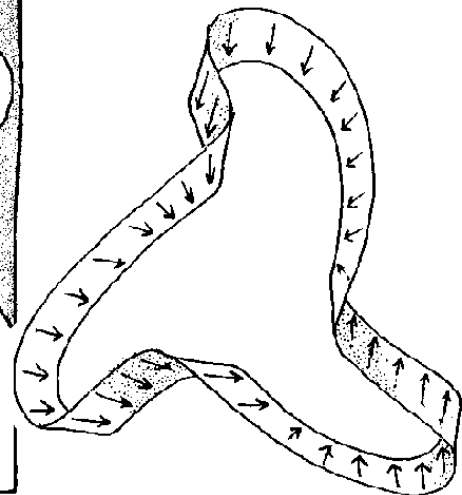
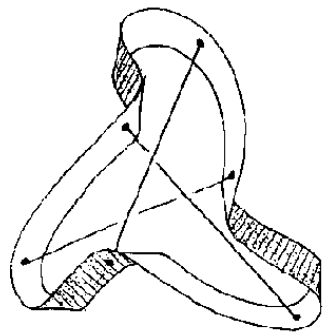
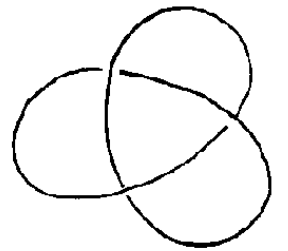
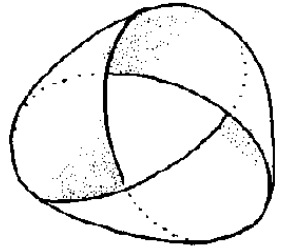
और अब्बे लेमैटरे (\*) के सोच के अनुसार एंटी-मैटर का मतलब था मैटर (पदार्थ) को पीछे से आगे की ओर देखना.

अगर हमें टायर्सियस से मिलने का दुर्भाग्य प्राप्त होगा, तो वो एंटी-टायर्सियस बन गया होगा.

तुम्हारा क्या मतलब?

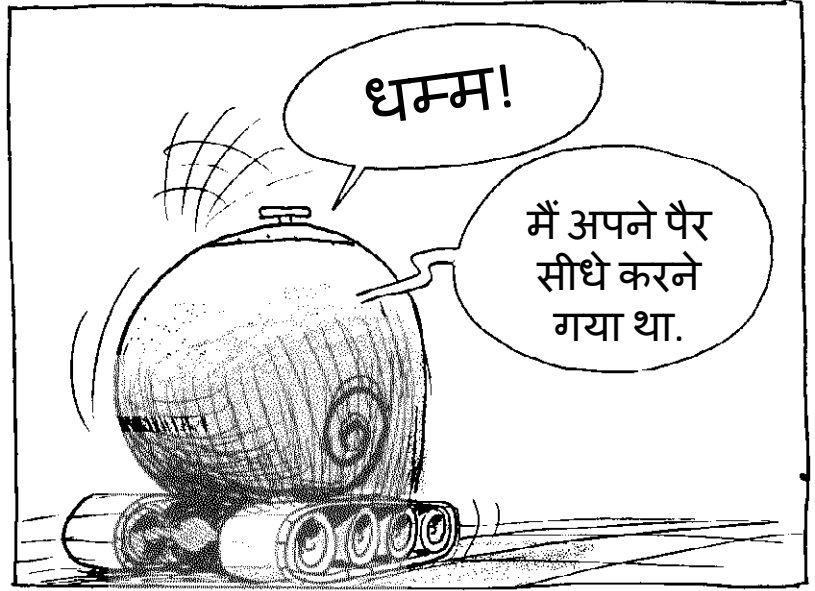
और हां!

(\*) बिग-बैंग देखें





टायर्सियस!  
तुम कहाँ थे?



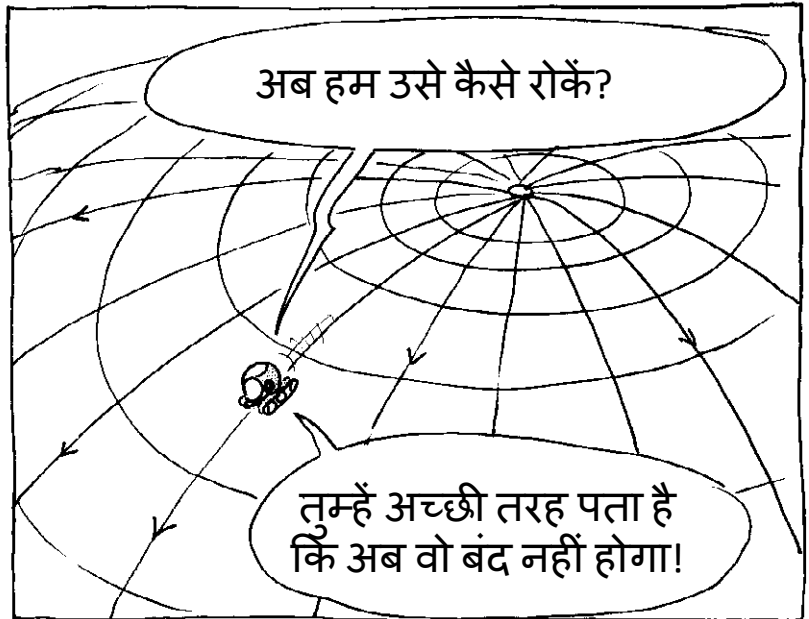
धम्म!

मैं अपने पैर  
सीधे करने  
गया था.



अरे! देखो क्रोनोस्केप  
(CHRONOSCAPE) वो खुद अपने  
आप ही शुरू हो गया...

तुम्हें दरवाजा इतनी ज़ोर से  
नहीं पटकना चाहिए था!

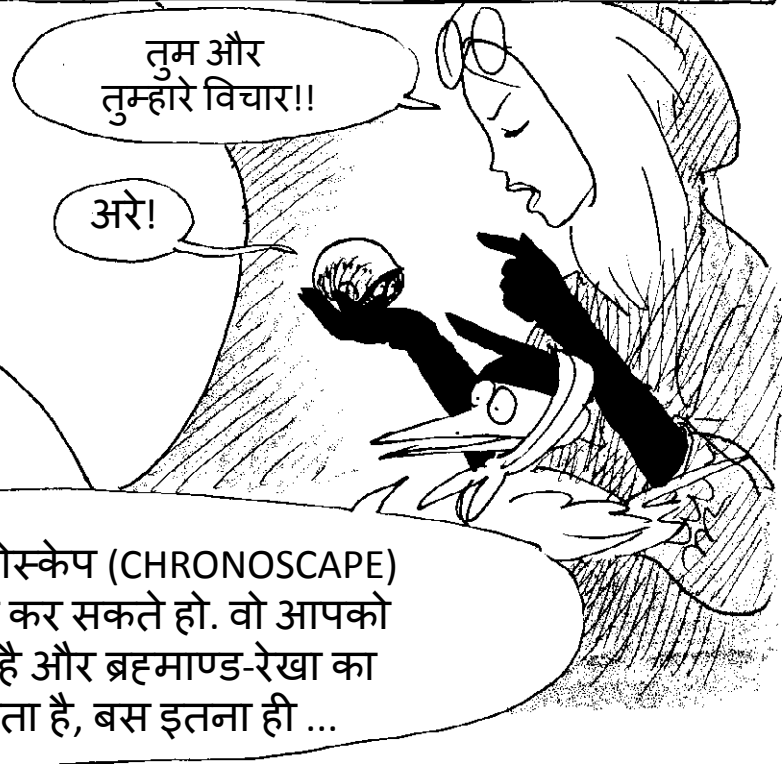


अब हम उसे कैसे रोकें?

तुम्हें अच्छी तरह पता है  
कि अब वो बंद नहीं होगा!



वो कैसे चलता है?

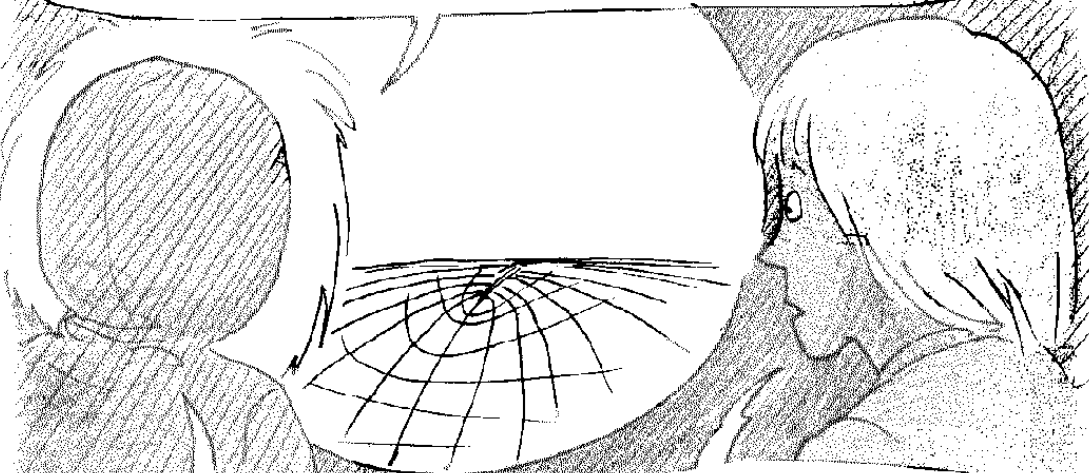


तुम और  
तुम्हारे विचार!!

अरे!

तुम एक क्रोनोस्केप (CHRONOSCAPE)  
को ड्राइव नहीं कर सकते हो. वो आपको  
ड्राइव करता है और ब्रह्माण्ड-रेखा का  
पालन करता है, बस इतना ही ...

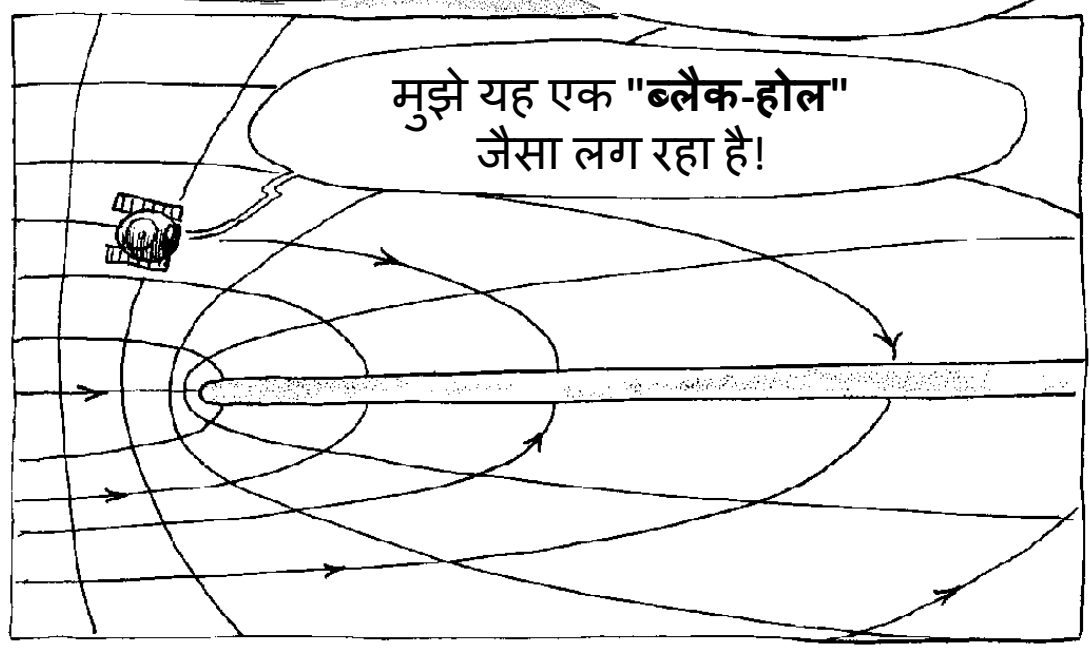
अरे, वो देखो! ठीक सीधे!



वो नाभि जैसा दिखता है!

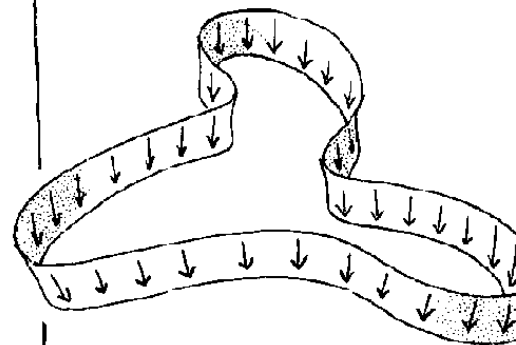
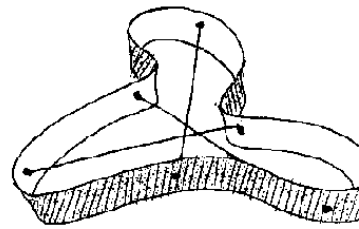
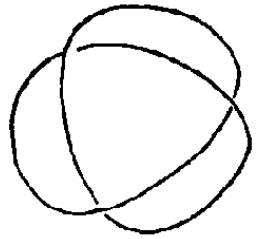
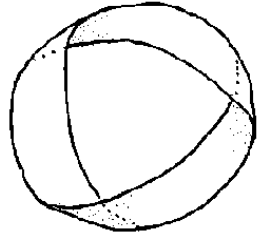
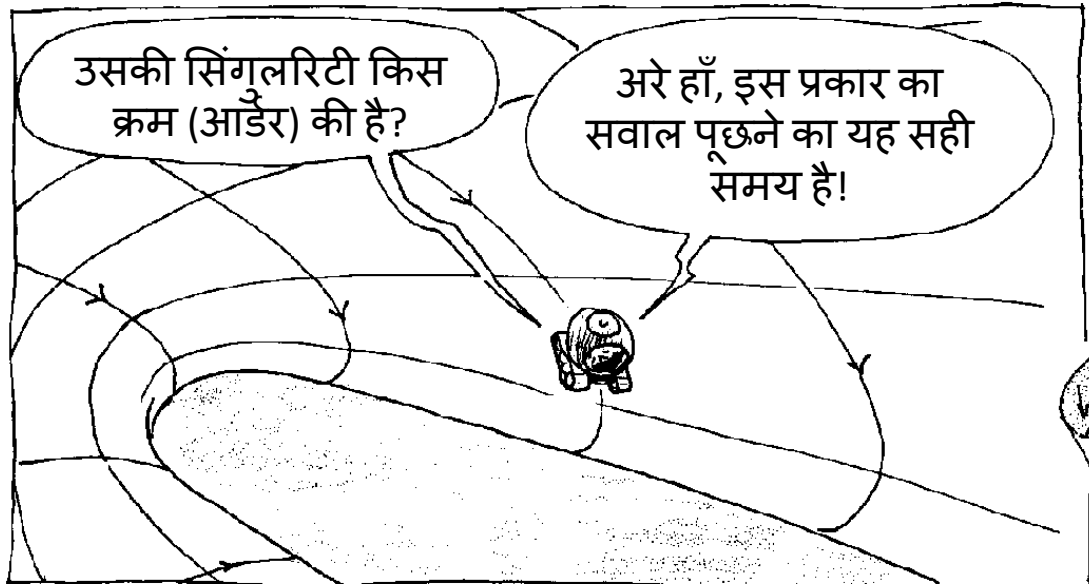
हमारी ब्रह्माण्ड-रेखा सीधे उसी ओर जा रही है!

मुझे यह एक "ब्लैक-होल" जैसा लग रहा है!

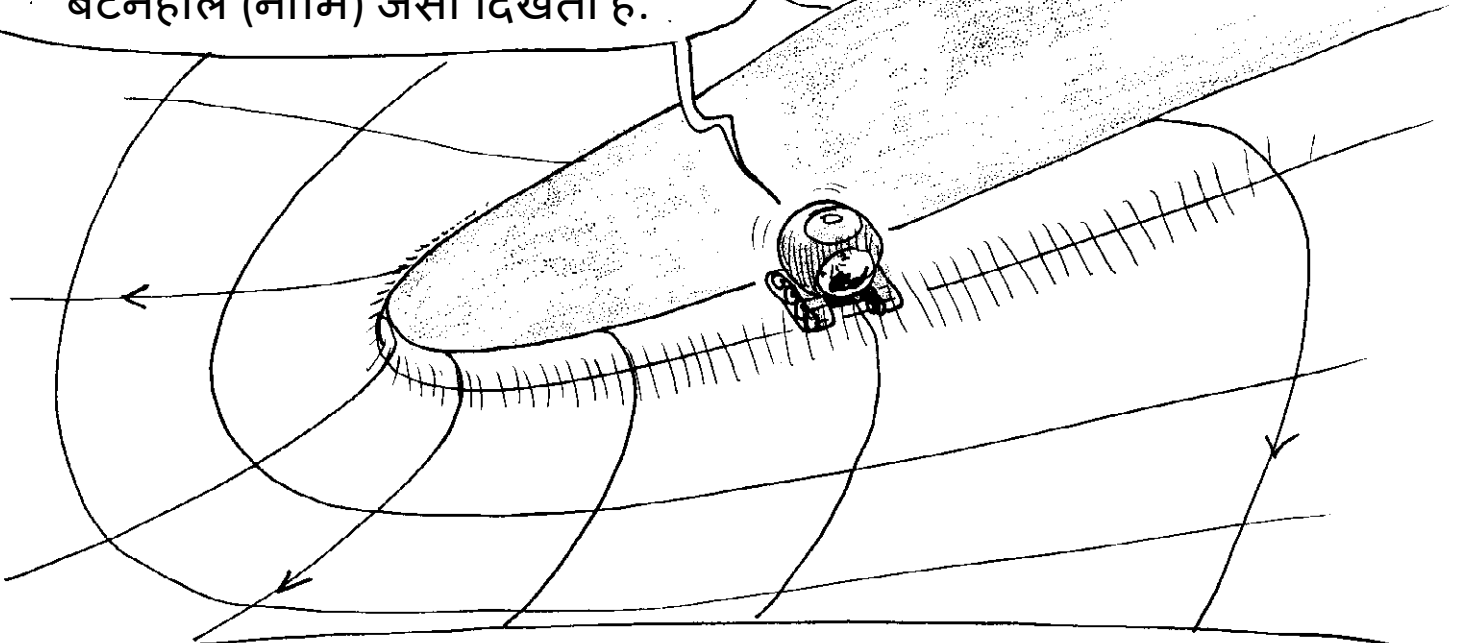


उसकी सिंगुलरिटी किस क्रम (आर्डर) की है?

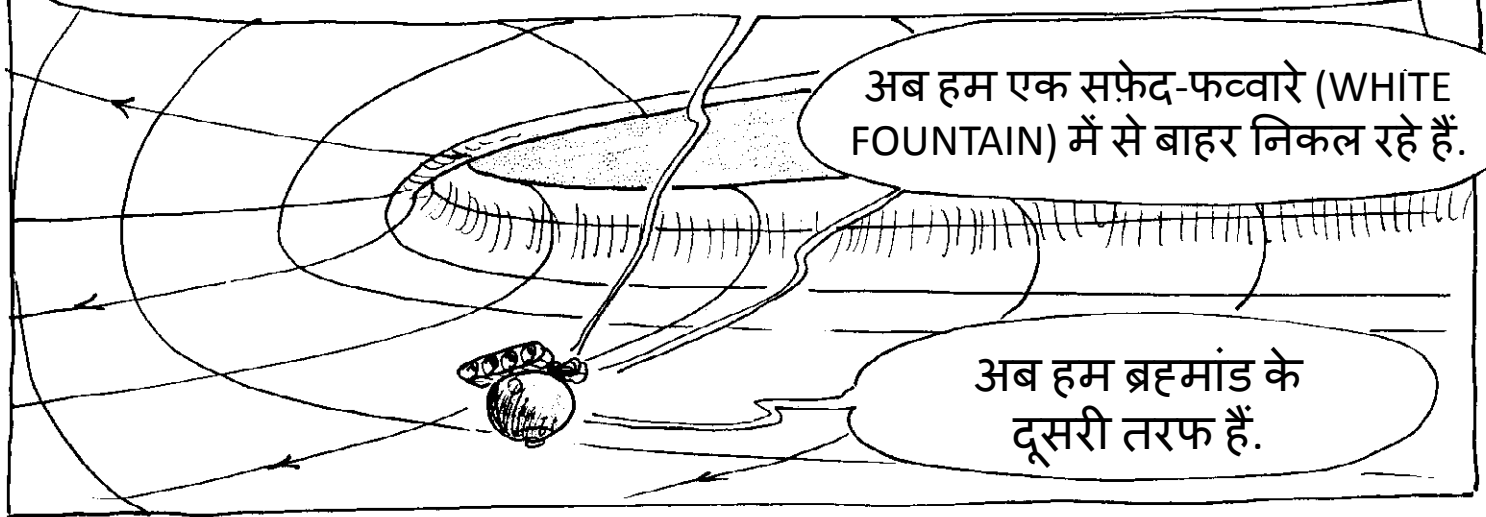
अरे हाँ, इस प्रकार का सवाल पूछने का यह सही समय है!



यह एक तरह का स्पेस-टाइम बटनहोल (नाभि) जैसा दिखता है.

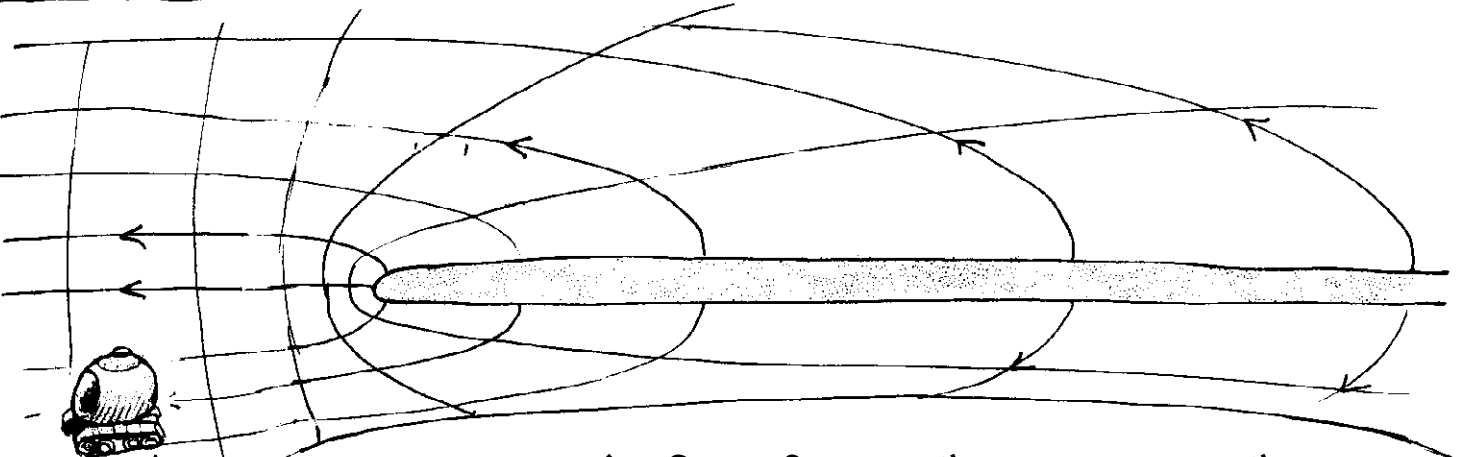


अब ब्रह्माण्ड-रेखायें, सिंगुलरिटी को छोड़ रही हैं.



अब हम एक सफ़ेद-फव्वारे (WHITE FOUNTAIN) में से बाहर निकल रहे हैं.

अब हम ब्रह्मांड के दूसरी तरफ हैं.

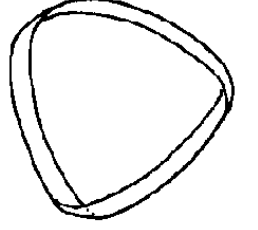


यह ब्रह्मांड की दूसरी तरफ जैसा ज़रूर लगता है सिवाय इसके कि वो विपरीत दिशा में जा रहा है. मुझे लगता है जैसे मैंने उसे पहले कहीं देखा हो?

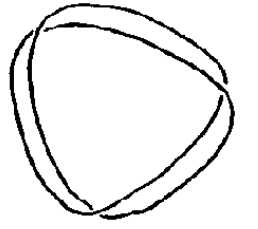


अब मुझे समझ में आया,  
दर्पण!

कैसा दर्पण?



ब्रह्मांड के दो हिस्से एक-दूसरे को प्रतिबिंबित करते हैं, लेकिन वो एक स्पेसिओ-टेम्पोरल दर्पण है. भौतिकी के नियमों के अनुसार ब्लैक-होल के दूसरी तरफ समय से सम्बंधित सब कुछ उल्टा होगा : सिंगुलरिटी, पदार्थ को आकर्षित करने के बजाए उसे विकर्षित करेगी!! (\*)



क्या इसका मतलब यह है कि हम इस पुस्तक को दूसरी दिशा में जाते हुए पढ़ेंगे?

हां, तब क्रोनोस्केप (CHRONOSCAPE) बंद हो जाएगा, फिर आर्ची दरवाजा खोलेगा, फिर टायर्सियस रेंगते हुए बाहर जाएगा फिर ...



दोहरी पट्टी के एंटी-पोडल बिंदु जुड़े होंगे.

**FIN**

अंत

71

(\*) वही संरचना 4-आयामों में भी रह पाएगी.

# वैज्ञानिक पूरक-अंश

बॉय, हिल्बर्ट के एक शिष्य, ने 1902 में बॉय-सतह की खोज की.

उसका पहला विश्लेषण 1921 में गणितज्ञ जे. एम. सौरियो के बेटे,

जेरोम सौरियो और इस पुस्तक के लेखक ने किया.

एक अर्ध-प्रयोगसिद्ध विधि के उपयोग द्वारा सतह की मेरिडियन,

दीर्घवृत्त (एलिप्स) से जुड़ती है. वर्तमान बिंदु इस प्रकार ज्ञात किया

जा सकता है :

$$\begin{cases} x = X_1 \cos \mu - Z_1 \sin \alpha \sin \mu \\ y = X_1 \sin \mu + Z_1 \sin \alpha \cos \mu \\ z = Z_1 \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = \frac{A^2 - B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} + A \cos \theta - B \sin \theta \\ Z_1 = \sqrt{A^2 + B^2} + A \cos \theta + B \sin \theta \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8} \sin 3\mu \quad \begin{cases} A(\mu) = 10 + 1,41 \sin(6\mu - \pi/3) + 1,98 \sin(3\mu - \pi/6) \\ B(\mu) = 10 + 1,41 \sin(6\mu - \pi/3) - 1,98 \sin(3\mu - \pi/6) \end{cases}$$

```
1  REM TRACE MERIDIENS DE LA SURFACE DE BOY
3  HOME : TEXT
50 PI = 3.141592:P3 = PI / 3:P6 = PI / 6:P8 = PI / 8
60 HGR : HCOLOR= 3
90 FOR MU = 0 TO PI STEP 0.1
95 P = P + 1
100 D = 34 + 4.794 * SIN (6 * MU - P3)
110 E = 6.732 * SIN (3 * MU - P6)
120 A = D + E:B = D - E
130 SA = SIN (P8 * SIN (3 * MU))
140 C2 = SQR (A * A + B * B):C3 = (4 * D * E) / C2
160 CM = COS (MU):SM = SIN (MU)
180 FOR TE = 0 TO 6.288 STEP .06
190 TC = A * COS (TE):TS = B * SIN (TE)
200 X1 = C3 + TC - TS
210 Z1 = C2 + TC + TS
250 REM VOICI LES 3 COORDONNEES
300 X = X1 * CM - Z1 * SA * SM
310 Y = X1 * SM + Z1 * SA * CM
350 REM PROGRAMME DE DESSIN
360 H PLOT 130 + X,80 + Y
400 NEXT TE: NEXT MU
```



